И. Н. БУРОВА

ПАРАДОКСЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ И ДИАЛЕКТИКА

Издательство «Наука»

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
Кафедра философии

И. Н. БУРОВА

ПАРАДОКСЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ И ДИАЛЕКТИКА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
Москва 1976

В монографии исследуется соотношение философии и математики в процессе развития науки за последнее столетие; анализируются особенности возникновения диалектики в ходе развития математики, раскрывается значение понятия бесконечности в теории множеств.

Ответственный редактор
доктор философских наук
И. С. ТИМОФЕЕВ

Ирина Николаевна Бурова
ПАРАДОКСЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ И ДИАЛЕКТИКА

Утверждено к печати Кафедрой философии АН СССР

Редактор *Г. С. Андрияш.* Редактор издательства *В. А. Шуков.* Художник *А. Г. Кобрин.* Художественный редактор *С. А. Литвак.* Технический редактор *Е. Н. Евтянова.* Корректоры *М. К. Запрудская, Г. М. Котлова*

Сдано в набор 7/VI 1976 г. Подписано к печати 8/X 1976 г.
Формат 84×108$^{1}/_{32}$. Бумага типографская № 1
Усл. печ. л. 9,24. Уч.-изд. л. 9,9. Тираж 6 900.
Т-16547 Тип. зак. 751. Цена 62 коп.

Издательство «Наука». 103717 ГСП, Москва, К-62, Подсосенский пер., 21

2-я тип. издательства «Наука». 121099, Москва, Г-99, Шубинский пер., 10

Б $\frac{10502-281}{042(02)-76}$ 146—76(I)

© Издательство «Наука», 1976 г.

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что на протяжении своей истории математика трижды испытывала кризисное положение. В состоянии кризиса она находится и с начала XX в. Общей причиной всех кризисов является, на наш взгляд, то, что математики не могли справиться с философскими и логическими проблемами, возникающими каждый раз в связи с открытием нового аспекта, нового содержания в понятии бесконечности. Природа бесконечности диалектична, и время от времени математики невольно обнаруживали это, однако они никак не могли осознать ее логико-философского значения. Вместо принятия содержательной диалектической логики математики всячески варьировали формальную логику. Хотя они и развивали ее, но выхода из кризиса не находили, поскольку не шли до конца в понимании диалектической глубины проблемы.

То, что в математике не была осознана диалектическая природа обнаруженных противоречий в первых двух кризисах, неудивительно, так как и в философии не было еще полного понимания диалектики. Но в настоящее время материалистическая диалектика существует в научной форме, и никто не делает из нее тайны. Если некоторые математики и теперь игнорируют диалектику, то это говорит только о пренебрежении к передовым достижениям философии. Науке это обходится дорого. Еще Ф. Энгельс писал, что если естествоиспытатели ругают философию, то они тем самым вовсе не освобождаются от нее, а, наоборот, оказываются в подчинении у самой отсталой философии, «... и те, кто больше всех ругает философию, являются рабами как раз наихудших вульгаризированных остатков наихудших философских учений» [2а, с. 525]. Об аналогичном положении в настоящее время свидетельствуют современные французские математики Н. Бурбаки. «Точка зрения математиков на вопросы философского порядка,— пишут они,— даже если эти вопросы имеют существенное значение для их науки, в большинстве случаев основана на мнениях, полученных из вторых и третьих рук и из источников сомнительной ценности» (22, с. 21).

Для того чтобы преодолеть первый и второй кризисы в математике, прибегали к различным искусственным приемам, которые не устраняли причину кризисов, а создавали только видимость разрешения. Например, по поводу «разрешения» второго кризиса в математике Ф. Энгельс писал: «Нет ничего комичнее, чем жалкие уловки, увертки и вынужденные приемы, к которым прибегают математики, чтобы разрешить... противоречие, примирить между собой высшую и низшую математику, уяснить себе, что то, что у них получилось в виде неоспоримого результата, не представляет собой чистой бессмыслицы,— и вообще рационально объяснить исходный пункт, метод и результаты математики бесконечного» [2а, с. 519].

Но положение с нынешним, третьим, кризисом в математике гораздо сложнее, чем с двумя первыми. Во-первых, попытки устранить парадоксы теории множеств привели к развитию математической логики и появлению в нашем веке многочисленных логик с существенными отклонениями от традиционной логики. Это создает такое положение, когда старые каноны, и в первую очередь принцип непротиворечивости, перестают казаться единственно возможными, какими они казались раньше. Во-вторых, третий математический кризис, или, вернее, кризис философских вопросов в математике имеет столь явный характер, а попытки разрешить это кризисное положение столь явно несостоятельны, что очевидна необходимость каких-то особых, экстраординарных мер для разрешения создавшегося положения. В-третьих, математики все чаще приходят к таким открытиям в своей науке, которые подтачивают абсолютизацию основных принципов старого мышления, старой логики [1]. Кроме того, материалистическая разработка диалектического способа мышления со времени К. Маркса и Ф. Энгельса дала столь богатый материал, что он не может быть полностью игнорирован даже враждебными марксистской философии учеными.

---

[1] Например, теоремы К. Гёделя, открытие П. Коэна и другие. Подробнее см. о них в главе III.

Таким образом, метафизически абсолютизированный старый способ мышления в математике осаждается со всех сторон и находится в бедственном положении. Однако каноны старой логики закреплены в принципах аксиоматизации, которая распространилась в наше время не только как способ изложения готового материала, но прямо-таки как метод познания, как способ движения науки, и незаметное, стихийное изменение его невозможно.

Попытка существенно реконструировать старую логику проявляется в формировании новых типов логик. Однако все эти новые логики предполагаются, во-первых, как варианты наряду с другими, а во-вторых, в них нет прямого, сознательного преодоления абсолютизации фундамента прежнего стиля мышления — принципа непротиворечивости. Но такое преодоление в определенных рамках, на наш взгляд, необходимо для разрешения существующего ныне кризиса в математике, ибо он касается самого содержания мышления.

Введение диалектических принципов в математику само по себе является большой и сложной проблемой. Возникает ряд вопросов, связанных с этим. Как быть со старыми принципами логики, особенно с принципом непротиворечивости? Как отличить диалектические противоречия от внешних противоречий — ошибок? В какой степени введение принципов диалектической логики потребует перестройки всей математики? Как, в каком виде должно произойти это введение? Нужно и можно ли формализовать диалектическую логику? Все эти вопросы возникают, даже если бы математики в принципе уже были согласны с необходимостью изменить способ мышления и изложения в математике. Однако ни у философов, ни у математиков нет такого согласия, поэтому первой и главной целью данной работы является философско-логический анализ третьего кризиса основ математики, без которого нельзя решить проблему введения диалектического противоречия как принципа логики при определенных условиях, в определенных случаях.

Третий кризис в математике связан с теорией множеств Г. Кантора и ее парадоксами, поэтому необходим подробный логический и диалектический анализ сущности этих парадоксов. Обычно только более или менее подробно излагают процесс вывода парадоксального положения в теории множеств, но диалектического толкования при этом не дается. Исключения не составляет и книга болгарского философа С. Петрова, специально посвященная анализу логических парадоксов в современной науке [87, с. 100—116], хотя она и содержит богатый материал по вопросу о парадоксах и логических принципах, принимаемых в математике за непреложные. Тем более нельзя встретить диалектического анализа антиномий в работах математиков [119, с. 11—26, 134—139; 49, с. 40—43; 46, с. 20—26; 22, с. 44—53]. Можно согласиться с мнением В. А. Смирнова и П. В. Таванца, высказанным ими в книге «Философия и логика»: «Вопрос логического и философского обоснования теории множеств и даже возможность такого обоснования остаются открытыми» [116а, с. 11].

Основные парадоксы теории множеств связаны с диалектикой актуальной бесконечности. И это неудивительно, поскольку своей теорией множеств Г. Кантор внес очень большой вклад в развитие этого понятия. До него уже было сделано достаточно в этом отношении многими математиками как предшествующих веков, так и XIX в., особенно Больцано и Дедекиндом. Используя их достижения, Кантор пошел дальше, ввел целый ряд новых понятий, обогативших содержание понятия бесконечности.

Обычно в математике использовалось «мирное», совместимое с традиционной логикой понятие потенциальной бесконечности, под которой понимается монотонный процесс увеличения или уменьшения числа. Под актуальной же бесконечностью понимается бесконечный ряд, взятый в целом как законченный. В содержании понятия потенциальной бесконечности диалектика не выступает в явном виде, так как здесь конечное и бесконечное, прерывное и непрерывное непосредственно не сталкиваются. В актуальной же бесконечности конечное и бесконечное как бы совмещаются, они существуют вместе. Тем самым проявляется в открытом виде единство противоположностей, что трудно совместить с законами формальной логики, приспособленными в основном для «разложенных», отделенных друг от друга противоположностей.

Бесконечность — понятие, для математики имеющее особое значение. Во-первых, оно является необходимым в науке, связанной с количественной стороной мира. Во-вторых, понятие бесконечности, благодаря всеобщему своему характеру, играет методологическую роль в математике и тем самым неизбежно связано с философскими проблемами. Понимание глубины и всеобщности понятия бесконечности мы находим у многих математиков. Особенно отчетливо это понимал Д. Гильберт, который в одном из своих докладов в 1925 г. сказал: «...Окончательное выяснение *сущности бесконечного* выходит за пределы узких интересов специальных наук и, более того... оно стало необходимым для чести самого человеческого разума» [30, с. 341]. В-третьих, понятие бесконечности, особенно актуальной, несет в себе «взрывную силу» диалектики.

Из всего этого, нам кажется, становится понятно, почему именно проблема бесконечности была внутренней причиной двух прежних кризисов в математике так же, как и причиной теперешнего кризисного положения в ней. Это мнение разделяют советские философы Ю. А. Петров и, частично, Г. И. Наан, исследующие вопросы бесконечности [16, с. 10—11; 89, с. 92]. С Г. И. Нааном нельзя согласиться, пожалуй, только в том, что кризисы в математике и логике будут возникать всегда, и число их может быть даже бесконечным. Наан считает, что такое положение обусловлено неисчерпаемостью самого понятия бесконечного. «Можно не сомневаться в том,— пишет он,— что математике и логике предстоит еще не один кризис. В принципе в силу неисчерпаемости бесконечного число кризисов может быть бесконечным. Практически этому препятствует лишь конечное время существования цивилизации на любой данной планете» [16, с. 14]. Но здесь, на наш взгляд, содержится в скрытом виде утверждение, что сущность кризисов в математике является внутренним делом математиков, не связанным с диалектикой бесконечности. Говорить, что такие кризисы будут всегда, можно было бы лишь в том случае, если бы причиной их были просто трудности «роста», трудности освоения новых непривычных истин. Но дело заключается вовсе не в том, что необходимо время от времени «привыкать» к новым понятиям, которые появляются в каждой науке с ее развитием.

Сущность и причина кризисов в математике заключается, по нашему мнению, в том, что устаревшая методология и логика сталкиваются с новыми открытиями такого рода, которые по существу своему требуют радикальных изменений в трактовке логики и методологии, а то и всего мировоззрения. Метафизическое представление о логике и вообще о явлениях мира приходит в противоречие с проявляющейся в явном виде диалектикой, которую сами математики невольно обнаруживают, делая те или иные фундаментальные открытия. Для устранения главной основы кризисного положения в обосновании математики необходимо сознательное принятие диалектических принципов мышления. Если математики перестроят свое мышление на диалектический лад, то кризисы такого рода, которые были в математике до сих пор, станут просто невозможными: их предотвращение будет гарантировано способностью математиков правильно истолковывать диалектические противоречия, встречающиеся в их науке.

Следовательно, если предполагать, что математики никогда не станут мыслить диалектически, то тогда можно говорить о бесконечной возможности кризисов. Но если смотреть на возможности человеческого мышления более оптимистично [2], то нужно признать, что возникновение в математике таких кризисов, сутью которых является столкновение устаревшего мышления с диалектическим содержанием новых математических понятий и теорий, не может повторяться вечно.

Следует отметить, что разрешение кризисов оснований математики можно понимать двояко: во-первых, как философское объяснение создавшейся ситуации и на его основе указание методологических путей выхода из кризиса и, во-вторых, как указание чисто математического, конструктивного пути к устранению возникших трудностей в построении теории. Если во втором смысле из кризисов в математике всегда бывали найдены выходы, то в первом смысле ни один из кризисов не был разрешен математиками. Вопрос об этом будет рассмотрен подробно по отношению к третьему кризису.

---

[2] О необходимости движения математиков и естествоиспытателей по пути к диалектическому мышлению неоднократно подчеркивал, как известно, Ф. Энгельс [2, с. 14; 2а, с. 343, 368—369, 382, 519, 524—525 и др.].

Для анализа современного кризиса в математике и выявления того, что этой науке сейчас, как никогда ранее, необходимо введение диалектических принципов мышления, нет нужды ни в каких других видах бесконечности, кроме потенциальной и актуальной. Здесь можно согласиться с Г. И. Рузавиным в том, что фактически различные виды бесконечности, введенные Г. И. Нааном, сводятся к этим двум типам [16, с. 78]. Вокруг потенциальной и актуальной бесконечности на протяжении всей истории математики и философии велась ожесточенная борьба, которая продолжается и до сих пор. В математике яркое ее проявление мы видим в тех спорах, которые ведутся сейчас вокруг теории множеств и связанных с ней логических вопросов. В философии эта борьба выражается в различных мнениях о значении проблемы и понятия бесконечности.

Одной из двух крайних точек зрения в этом вопросе является финитизм, то есть отрицание необходимости и важности понятия бесконечности для науки. Содержание противоположной точки зрения заключается в признании большого значения не только потенциальной, но также и актуальной бесконечности. Представители промежуточной точки зрения признают только потенциальную бесконечность и отрицают актуальную. Наиболее ярко ее выражение мы находим у интуиционистов и конструктивистов среди математиков, а среди философов — у В. И. Свидерского, А. С. Кармина, И. З. Цехмистро и других [см. 102, 120а, 51].

Первостепенное значение понятия бесконечности в проблеме разрешения парадоксов теории множеств делает необходимыми некоторые предварительные замечания об основных видах бесконечности. Самый упрощенный вид потенциальной бесконечности — это «дурная». В ее содержании — однородная и однообразная количественная характеристика бесконечности, сводимая к процессу отрицания и утверждения бесструктурной абстрактной единицы. Бесконечность берется здесь не вся сразу, а как становящаяся путем однообразных актов сложения однородных единиц, никогда не приводящих к качественным скачкам, переходам даже конечного характера. Выше, чем «дурная»,— собственно потенциальная бесконечность, поскольку в это понятие вкладывается различное качественное содержание. Но здесь, во-первых, существует та ограниченность, что бесконечность берется только в возможности, как становящаяся; во-вторых, качественно различные ступени в ней мыслятся как по видимости конечные множества. Бесконечное представлено здесь только через конечное; бесконечное как таковое не присутствует актуально. Бесконечность всегда остается за пределами конечного, которое одно только и содержится в понятии потенциальной бесконечности. Вследствие этого диалектика конечного и бесконечного, противоречие между ними в явном виде здесь не обнаруживается.

Более глубоким является понимание бесконечности как актуальной, т. е. как «ставшей», взятой в целом. Актуальная бесконечность, во-первых, обнаруживает себя как последовательность качественно своеобразных бесконечных — а не только конечных — ступеней, последовательностей. Во-вторых, в ней выступает качественное отличие не только от конечного, но и от потенциально бесконечного, ибо ему не свойственны ни те закономерности, которые присущи конечному (например, часть в нем не меньше целого), ни те, которые присущи потенциальной бесконечной последовательности (принцип математической индукции, например).

Часто отмечают и даже подчеркивают, что потенциальная бесконечность отражает процесс, движение, тогда как актуальная бесконечность будто бы отражает покой и отсутствие всякого движения, поскольку она уже осуществилась, стала [см. 16, с. 85; 89а, с. 41]. Однако с этим никак нельзя согласиться. Отражение движения в потенциальной бесконечности ограничено рамками конечного. Если мы, например, берем натуральный ряд чисел, то должны находиться только внутри него, а не переходить за его границы. Если мы возьмем «расстояние» от одного целого числа до другого, то и тут мы не можем перейти предела, обозначенного вторым числом, хотя этот предел вполне конечен и определен. Таким образом, в понятии потенциальной бесконечности движение отражается «от сих» и «до сих», ибо преодоление границы бесконечности здесь недопустимо.

Антиномии потому всегда и обнаруживаются в понятии не потенциальной, а актуальной бесконечности, что она-то как раз и выражает наиболее полно и глубоко диалектическую противоречивость бесконечного. Потенциальная бесконечность — это лишь момент актуальной бесконечности, из которой она выводится логически. Потому-то прав Г. Кантор, когда подчеркивал невозможность понятия потенциальной бесконечности при отрицании актуальной.

История математики совершенно недвусмысленно показывает, что понятие актуальной бесконечности было для этой науки не тормозом, а, наоборот, движущей силой развития. Особенно это очевидно в нашем веке в связи с развитием теории множеств. Не умея диалектически мыслить, некоторые математики и логики ставят перед собой неосуществимую цель: в корне ликвидировать парадоксы. Однако это не мешает тому, что в процессе осуществления таких попыток часто получают побочные результаты, обогащающие как математику, так и логику.

Для того чтобы показать революционную роль понятия актуальной бесконечности в развитии математики, необходимо рассмотреть историю понятия бесконечности и парадоксов теории множеств на протяжении последнего столетия.

Глава I

ПОНЯТИЕ БЕСКОНЕЧНОСТИ В ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

ВКЛАД Г. КАНТОРА В РАЗВИТИЕ ПОНЯТИЯ БЕСКОНЕЧНОСТИ

Даже если только перечислить все те понятия, которые Кантор ввел в математику, то и тогда будет сразу ясно, как много он сделал для развития проблемы бесконечности, так как все введенные им понятия относятся именно к бесконечности. Но Кантор не просто ввел отдельные новые понятия, а связал их единой теорией множеств, которая и положила начало новой эпохе в развитии математики, точно так же, впрочем, как и начало новому кризису.

Кантор не ограничивался строго доказанными положениями, а стал широко пользоваться «интуитивным» представлением об актуальной бесконечности. Исходя из допущения ее существования, он строил свои дальнейшие суждения, которые и привели его к новым открытиям. Кантор хорошо видел связь между потенциальной и актуальной бесконечностями. Он писал, что невозможно было бы продолжать никакой потенциально-бесконечный процесс, если бы заранее не было известно о возможности этого процесса.

Если Кантор не понимал отчетливо противоречий между конечным и бесконечным, то во всяком случае многократно повторял мысль о качественном своеобразии и различии конечного и бесконечного.

Большой заслугой Кантора является введение понятия мощности, аналогичного понятиям «число» и «количество»[1] в конечных множествах. С помощью этого нового понятия он дал четкое определение бесконечного множества как такого, в котором его «составная часть» равна по мощности всему множеству. Это определение действительно и поныне.

---

[1] Вопрос о том, как долго и сложно человечество шло к очень содержательному и важному для науки понятию «мощность», изложен в книге И. С. Тимофеева [см. 109, с. 115—126].

Введение понятия мощности дало возможность сравнивать различные бесконечности. Так, Кантор ввел понятие счетного и несчетного множества. Счетное — это такое множество, которое можно привести во взаимно-однозначное соответствие с множеством целых положительных чисел, т. е. натурального ряда. Несчетное же множество — это такое множество, которое равномощно ряду всех действительных чисел. В связи с этим весьма существенным различением мощностей бесконечных множеств Кантор высказал предположение о том, что мощность ряда действительных чисел, или континуума, является непосредственно следующей за мощностью счетного множества. Это предположение называется континуум-гипотезой и имеет важное теоретическое значение, о чем будет сказано ниже.

Введя понятия упорядоченности множеств и упорядоченного бесконечного множества, Кантор увидел, что в бесконечности порядок элементов играет гораздо более значительную роль, чем в конечных количествах. Так, например, если мы прибавляем к бесконечному множеству единицу слева, то это никак не изменяет мощности бесконечного множества. Если мы ту же единицу прибавляем справа от бесконечности, то получается новое множество, т. е. $\omega+1$,— это новое множество, отличное от бесконечного множества ω, а $1+\omega=\omega$. Отсюда, разумеется, вытекает неприменимость закона коммутативности для бесконечных чисел, или, как их назвал Кантор, трансфинитных чисел.

Однако, чрезвычайно обогатив содержание понятия бесконечности в математическом плане, Кантор не понял диалектики актуальной бесконечности. Правда, в частных случаях он говорил о том, что в бесконечности сливаются четное и нечетное, часть и целое, но он не придавал этому особого значения, стараясь отметить этими чертами только качественную разницу между конечным и бесконечным. Единственно, в чем Кантор ощущал потребность, так это в обосновании необходимости употребления понятия актуальной бесконечности в столь новом и широком плане. К сожалению, с последними достижениями в философии он не был знаком, тем более ему недоступна была марксистская философия. Но он искал поддержки у некоторых известных ему философов и даже богословов, затрагивавших проблему бесконечности.

Он понимал, что главная идея его теории множеств — это включение понятия актуальной бесконечности в математические операции и рассуждения, поэтому он старается обосновать в первую очередь именно это понятие. Он считает, что можно рассматривать актуально бесконечное в трех отношениях. Во-первых, оно существует в боге, и в этом случае называется абсолютным. Во-вторых, оно существует в конкретности, или в natura naturata (т. е. в созданной природе), и тогда Кантор называет его «трансфинитным». В-третьих, актуально бесконечное рассматривается в абстракции, и под этим он понимает то, как, в каких формах актуально бесконечное постигается человеческим умом. Это постижение может осуществляться в форме понятия трансфинитного числа «или,— пишет Кантор,— в еще более общей форме трансфинитных порядковых типов» [139, с. 372; 82, с. 82].

Если отбросить абсолютно бесконечное, т. е. бесконечное как бога, отмечает Кантор, то в связи с двумя другими проблемами, или отношениями, обнаруживаются четыре различные точки зрения, которые существовали раньше и существуют теперь. Во-первых, можно отрицать абсолютно бесконечное и в конкретном и в абстрактном (согласно терминологии Кантора), как это делал Коши и как делают позитивисты и другие [82, с. 82—83; 139, с. 372]. Во-вторых, можно принимать бесконечность в конкретности, но отвергать актуально бесконечное в абстракции. Эту точку зрения Кантор находит у Декарта, Спинозы, Лейбница, Локка и многих других, в том числе и у современных ему авторов [82, с. 83; 139, с. 373]. В-третьих, наоборот, можно признать актуальную бесконечность in abstracto, но отрицать in concreto. Здесь мы сталкиваемся с неосхоластиками. Другая часть богословов отрицает актуальную бесконечность и в том, и в другом виде. В-четвертых, актуально бесконечное можно принимать и in concreto, и in abstracto. Приверженцев этой точки зрения Кантор насчитывает, кроме себя, немного, но выражает твердую уверенность, что он не будет последним, защищающим актуальную бесконечность [139, с. 373; 82, с. 83].

В дифференциальном исчислении Кантор оценивает потенциальную бесконечность только как вспомогательное средство. Актуальное же бесконечное играет там, по его мнению, более значительную роль. Он считает, что «последние элементы», бесконечно малые непротяженны [139, с. 373—374; 82, с. 84] и число их актуально бесконечно (против чего выступал Коши). Кантор определяет здесь потенциально бесконечное как «*переменную* величину, *перерастающую* все границы» [139, с. 374; 82, с. 85]. Актуальное же бесконечное — это «в себе постоянное, константное, лежащее по ту сторону всех величин количество» [139, с. 374; 82, с. 85]. Он отмечает, что их часто смешивают. Так, бесконечно малые, которые являются только переменными, считают иногда определенными бесконечно малыми величинами, т. е. актуально бесконечно малыми, но это ошибочное мнение.

Кантору пришлось приложить много усилий для того, чтобы разъяснить своим противникам весьма существенную разницу между потенциальной и актуальной бесконечностями [139, с. 392—395]. Он считает, что антипатия к актуально бесконечному появилась под влиянием «эпикурейски-материалистического духа времени» [139, с. 374; 82, с. 86] (что только ни понимали под материализмом!), называет отрицание актуально бесконечного некритическим «страхом бесконечности» (horror infiniti), и это отрицание ему представляется «немалым преступлением против природы вещей, которые следует брать такими, каковы они есть... Это отношение можно рассматривать также как род *близорукости*, которая лишает возможности видеть актуально бесконечное» [139, с. 374—375].

Вторым часто встречающимся родом смешения является неразличение трансфинитного и абсолютного. Последние отличаются друг от друга существенно тем, что первое, хотя и бесконечно, но может быть увеличено, а второе не может увеличиваться. Потому-то абсолютное и немыслимо в математике. Такое смешение встречается в пантеизме, в «Этике» Спинозы [139, с. 375; 82, с. 86]. Кантор упрекает и Канта за его антиномии, за его «шаткое, неясное» употребление понятия бесконечности [2-3], что, пожалуй, справедливо, хотя Катор и не совсем правильно

[2-3] В некоторой степени здесь прав Э. Цермело, который пишет, что Кантор не понял «диалектического» смысла антиномий Канта и что по странности судьбы учение Кантора с трудом рас-

понял антиномии Канта. В ответе Кантора на известные ему возражения против актуальной бесконечности интересно то, что он обнаруживает свое знакомство с Кантом и Гегелем и свое отношение к ним.

Когда В. Вундт сравнивает Кантора с Гегелем, то это возмущает математика. Он называет Гегеля «пантеистическим» [139, с. 376; 82, с. 88], не знающим никаких различений в актуально бесконечном, тогда как для самого Кантора как раз характерны резкие различения внутри этого понятия. В другом месте Кантор говорит, что у Гегеля «все противоречиво, темно и сбивчиво, *противоречие* как выдающийся элемент его философии даже им самим возводится в характерную особенность его способа мышления, которой я по крайней мере не завидую» [82, с. 111—112; см. также: 139, с. 391]. Так обнаруживает Кантор свое непонимание диалектики.

В целом Кантор справедливо сетует на то, во-первых, что его обычно не понимают и говорят о потенциальной бесконечности, а не об актуальной. Но в то же время он несправедливо возмущается тем, что в понятии актуальной бесконечности видят внутреннюю противоречивость, и пытается опровергнуть это мнение, разумеется, безуспешно. В конце концов он ссылается на бога, который уж во всяком случае не потенциальное бесконечное, тогда как ныне все стараются употребить понятие бесконечности только в смысле потенциальной бесконечности.

Интересно, что Э. Цермело, издавший работы Кантора в 1932 г., относится к философским рассуждениям Кантора весьма пренебрежительно и считает, что они имеют только «психологически-биографический» интерес [139, с. 376—377]. На самом же деле, свойственная Кантору потребность в философском осмыслении своих математических достижений весьма интересна и характеризует его как широкого мыслителя. Он понимает, что бесконечное относится не только к области математики, но и к области «метафизики» [82, с. 91; 139, с. 378], т. е. философии.

Характерно, что Кантор везде подчеркивает свое отрицательное отношение к агностицизму по поводу познания бесконечного. Да это и естественно. Так, он против

пространялось из-за антиномий учения о множествах, формально аналогичных, по его мнению, антиномиям Канта [139, с. 377].

того, чтобы трансфинитное, как это некоторые делают, определяли как «трансцендентное» «то есть превосходящее силу человеческого рассудка» [82, с. 112; см. также 139, с. 391]. Он отмечает, что причиной непонимания трансфинитных чисел является смешение потенциальной и актуальной бесконечностей [82, с. 113; 139, с. 395].

Кантор очень страдал от консервативности умов и неприятия его учения о трансфинитном, а в нематематических кругах — и от отсутствия интереса к вопросу о бесконечности. Отсюда понятны следующие строчки письма Кантора к берлинскому профессору медицины А. Эйленбургу: «С удовольствием я заключаю из Вашего письма... что Вы относитесь к моим исследованиям с интересом, за который я тем более благодарен, чем реже я его встречаю у известных естествоиспытателей и врачей; ведь в этих кругах является в общем укоренившимся злом то, что я называю «horror infiniti» в самых различных отношениях и по самым различным причинам» [82, с. 121—122; 139, с. 400].

Кантор не устает снова и снова объяснять те основные понятия своего учения, без которых его невозможно понять. Но тем не менее непонимание, конечно, оставалось. Да и сам Кантор не видел диалектических противоречий в учении об актуально бесконечном. Вернее, он их видел, но упрямо не хотел признавать противоречиями. Если же на них обращали его внимание, то он отвечал, что это не противоречия, а просто соотношение между старыми, известными свойствами чисел и качественно новыми, ранее неизвестными. Так, возражая Гербарту[4], он писал, что тот сначала определяет бесконечное как только потенциально бесконечное, а потом отрицает все не относящееся сюда. Точно так же, писал он, можно было бы выставить аналогичный «довод» против существования различных конических сечений, возражая, например, Аполлонию Пергейскому: «Не существует никаких других сечений, кроме *круга*, и то, что ты называешь *эллипсом, гиперболой и параболой*,— понятия, полные противоречий» [82, с. 88; см. также 139, с. 375]. Кантор здесь прав в том, что в самом деле почти никто, кроме него, не обратил внимания на качественное отличие актуальной бесконечности как от конечных величин, так и от потенциальной бесконечности. Но в своем игнорировании диалектической противоречивости актуальной бесконечности Кантор проявляет философскую ограниченность.

---

[4] И. Ф. Гербарт (1776—1841) — немецкий философ-идеалист, психолог и педагог.

Это в значительной степени объясняется тем, что Кантору гораздо доступнее были современные ему идеалистические и богословские сочинения[5], чем марксистские. Даже философия Гегеля была непонятна Кантору, так что идейно он находился почти в «бесконечно удаленной точке» от передовой философской мысли своего времени. Потому-то он и не желал, вернее, не мог видеть ту диалектику, которая обнаружилась в его теории актуально бесконечного.

Неоднократно обращая внимание на то, что в бесконечном множестве часть может быть равна целому, Кантор называет это просто одним из новых, особых свойств бесконечного, отличных от свойств конечного [82, с. 140; 139, с. 416]. Он не видит того, что эти «просто новые» свойства заставляют вносить определенные коррективы в логику, а не только в математику, ибо это вовсе не «просто» новые свойства, а такие, которые существенно меняют наши коренные представлени об отношениях вещей, а потому касаются логики. Но это остается вне понимания Кантора, и он пытается доказать, что никакого противоречия здесь нет. Так, он писал, что нет никакого противоречия в равенстве целого и части, поскольку целое множество M и его часть M^1 относятся к различного рода реальностям. «Разве *первое* M не противостоит нам как объект,— спрашивает Кантор,— тогда как последнее M^1 есть абстрактный образ его *в нашем* духе?» [82, с. 141; см. также 139, с. 416]. Но это философски наивное рассуждение никак не может убедить нас в отсутствии противоречивости актуальной бесконечности. Что же касается древней аксиомы: «целое больше части», то Кантор говорит, что было бы ошибкой признавать это положение аксиомой, так как оно не действительно для бесконечности.

---

[5] Кроме того, и определенная религиозность Кантора, очевидно, объясняет его близкое знакомство с работами Августина и Фомы Аквинского, которых он иногда цитирует.

Все это было бы хорошо, если бы такие положения не лежали в основе формальной логики. Вместе с введением в науку понятия актуально бесконечного нужно было также внести существенные изменения в логику.

ОТНОШЕНИЕ МАТЕМАТИКОВ К ПОЯВЛЕНИЮ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Чтобы лучше понять отношение математиков к появлению теории множеств и ее парадоксов, необходимо напомнить, что за многие века существования математики как науки теоретической и строго доказательной в ней выработались определенные логические принципы построения рассуждений. К тому же развитие логики шло в значительной степени за счет совершенствования именно математических рассуждений, доказательств, и некоторым математикам стало казаться, как увидим ниже, что логика — это часть математики. Посягать на логику означало посягать и на математику. Казалось, что основа основ логических принципов — требование непротиворечивости — незыблема и никакому пересмотру подлежать не может. Действительно, всякое последовательное, научное мышление должно быть непротиворечивым. Нельзя утверждать то одно, то прямо противоположное или даже просто другое, несовместимое с первым высказыванием. Однако, не выступая против этого принципа, диалектический материализм внес существенную поправку в понимание значения принципа непротиворечивости. Математики часто считают его обязательным и непреложным не только в формальном отношении, но и в том смысле, что содержание понятий и суждений никогда не должно быть противоречивым. Но это положение не может быть принято нами, так как в явлениях существуют диалектические противоречия, и они требуют своего выражения в суждениях и умозаключениях. Правда, если формальная логика со своим принципом непротиворечивости будет оставаться чисто формальной, т. е. не будет вмешиваться в содержание суждений и понятий, то совместить ее с противоречиями, существующими в них, вполне возможно. Невозможно это будет только в тех особых случаях, когда противоречия обнаружатся в самом движении понятий как в диалектическом процессе.

В самом деле, ведь если мы утверждаем, что тело в одно и то же время и движется, и покоится, но в процессе всего рассуждения не отходим от этого положения, то законы логики можно считать ненарушенными. Однако именно в силу трудности отделения (различения) содержания и формы в суждениях и умозаключениях применение формальной логики строго только к форме мышления бывает невозможным. Так или иначе и в формальной логике приходится касаться содержания мышления.

Тем более это оказывается необходимо, если формальную логику абсолютизируют и представляют чуть ли не методологией мышления, что как раз свойственно чаще всего математикам.

Таким образом, диалектическая логика ни в коем случае не посягает на правила и законы формальной логики. Но при этом следует оговорить, что формальная логика не должна вмешиваться в проблемы содержания познания.

Недоразумения часто происходят именно из-за абсолютизации формальной логики, неправомерного расширения сферы ее действия. Если же сознательно оставаться в рамках применимости формальной логики, то она никакого препятствия для развития мышления не составляет, а, наоборот, способствует его упорядочиванию.

Отношение к теории множеств Кантора было разноречивым с самого начала. Весьма влиятельной была идея о неприемлемости бесконечности из-за ее парадоксов, а вместе с ней — о неприемлемости самой теории множеств. Ведь по крайней мере со времени К. Гаусса против актуальной бесконечности были настроены многие математики. По этому вопросу польские логики Е. Слупецкий и Л. Борковский спустя много десятилетий после появления теории множеств писали следующее: «Первые работы Кантора встретили непонимание и сопротивление со стороны многих современных ему математиков, ибо даже выдающиеся математики считали, что бесконечность не войдет никогда в состав математических понятий. Этот взгляд, например, разделял Гаусс, научное творчество которого относится к периоду, несколько предшествующему появлению первых работ Кантора. Однако эти прогнозы оказались неосновательными, а теория множеств быстро развивалась, став в короткое время основной математической дисциплиной и получив применение в различных разделах математики» [105, с. 167—168].

Но многими математиками теория множеств была принята восторженно, и они стали излагать целые отрасли математики на ее основе [70, с. 157—165]. Правда, тем из них, кто дожил до выявления парадоксов теории множеств, пришлось пережить большее или меньшее разочарование. Некоторые отказывались от канторовой теории множеств, например Пуанкаре и Брауэр. Другие пытались усовершенствовать логику и теорию множеств, используя новую, символическую логику, которая начала свое развитие еще в XIX в. Некоторые из математиков внесли определенный вклад в развитие проблемы бесконечности или способствовали распространению внимания к ней силой своего авторитета. Так, Г. Фреге (1848—1925) написал фундаментальный труд по обоснованию арифметики на основе терии множеств. И хотя уже при подготовке к изданию последнего тома его книги «Основания арифметики» стало известно о существовании парадоксов, связанных с актуально бесконечным, он тем не менее не отказался от теории множеств.

Высказывания Фреге относительно бесконечности имеют интерес хотя бы уж потому, что его авторитет и влияние на математиков XX в. весьма значительны. В 1892 г. он написал рецензию на работы Кантора о трансфинитных, которые вышли в журналах за 1879—1884 гг. и в 1890 г. были напечатаны отдельно в первой части избранных его работ [140]. Свое отношение к учению Кантора Фреге выразил также в неоконченной рукописи. Он защищал понятие актуально бесконечного и в целом оценивал возражения против него как ошибочные. Развивая доводы Кантора, он считал, что многие математики, во-первых, смешивают потенциально бесконечное с актуально бесконечным и направляют свои возражения против содержания потенциальной бесконечности, как будто она актуальная [244, с. 269; 161, с. 77]. Во-вторых, часто в возражениях встречается та ошибка, что на бесконечное переносят свойства конечного, как будто это «само собой разумеется» [161, с. 77].

Вопросы бесконечности и обоснования математики волновали Фреге до последних дней жизни. В последней статье, которую он не успел дополнить, как его просил издатель, Фреге называл источник познания бесконечности «геометрическим источником познания» [161, с. 293]. Он писал также, что именно в вопросе о происхождении знания о бесконечности геометрия и философия соприкасаются теснее всего. Свое мнение об этом Фреге недвусмысленно высказал в следующих словах: «Философ, который не имеет никакого отношения к геометрии,— только наполовину философ, и математик, который не имеет философской жилки,— только наполовину математик» [161, с. 293]. С сожалением Фреге писал, что эти науки удалились друг от друга. Он считал, что именно вследствие этого взаимного отчуждения математики и философии некоторые принимают числа как только знаки [161, с. 293]. Конечно, гораздо легче объяснить числа так, формально, чем показать их истинное содержание. Говорить о том, что числовые знаки не имеют никакого содержания и смысла, может лишь тот, по мнению Фреге, кто не имеет «никакого следа философского рассудка» [161, с. 293]. Ведь числа становятся тогда «совершенно бесполезными и не имеющими значения» [161, с. 293].

Рассуждая о бесконечности и философии, Фреге указывал, что из чувственного восприятия нельзя получить ничего бесконечного: сколько бы мы ни пересчитывали звезд на небе или песчинок на морском берегу, их число не станет бесконечным [161, с. 294]. Следовательно, нужен особый источник для познания бесконечного — «геометрический источник» [161, с. 294]. По сути дела это — «пространственный» источник познания. Но и «временной» источник познания бесконечности также признается Фреге. «Двусторонне бесконечное время подобно двусторонне бесконечной прямой»,— писал он [161, с. 294]. Четкой философской позиции у Фреге не было: под объективным он понимал «истину», а не материальные вещи, и под пространством-временем — тоже нечто геометрическое, абстрактное, а отнюдь не форму существования материи. Некоторые попытки обратиться к объективному источнику познания очень смутны и не говорят о четких материалистических тенденциях. Правда, в 1892 г. в статье «О смысле и значении» Фреге писал: «Я понимаю под мыслью не субъективную деятельность мышления, а его объективное содержание, которое способно быть общей принадлежностью многого» [244, с. 32]. Это можно трактовать и как объективный идеализм, но под «многим» здесь понимается все-таки нечто не зависимое от созния[6]. Несмотря на некоторые материалистические тенденции своего мировоззрения, Фреге не смог справиться с парадоксами теории множеств, что объясняется метафизичностью его взглядов [90, с. 548—551].

Многие из математиков, принявших идеи Кантора, стали разрабатывать новые стороны проблемы бесконечности. Так, в 1890 г. в «Математических анналах» была опубликована работа Дж. Пеано (1858—1932) о кривой, которая заполняет все точки квадрата [202, с. 157—160]. Это была конкретизация содержания понятия бесконечности в аспекте непрерывности и качественного различия внутри бесконечностей. Еще Кантор доказал, что между точками прямой и точками поверхности можно установить взаимно однозначное соответствие. Но несколько позже другие ученые доказали, что такое соответствие необходимо является дискретным. Утверждение Пеано заключается в том, что если соотношение между точками прямой и квадрата непрерывно, то оно не может быть взаимно однозначным [202, с. 160; 56, с. 111—113]. Если же оно взаимно однозначно, то не является непрерывным, как было доказано ранее. Получается, что соответствие между точками прямой и поверхности не может быть одновременно и взаимно однозначным и непрерывным. Тут в математической форме выявился «очевидный» факт, что бесконечные множества точек объектов различного измерения качественно различны между собой. Они равномощны, но качественно различны, что связано с разницей в порядке, расположении точек прямой и плоскости. Это выражается в том — тоже «очевидном», «интуитивно ясном» — положении, что точка плоскости имеет большее число соседних точек, чем точка прямой, что было доказано Кантором и другими математиками [56, с. 115].

Свойства непрерывности, свойства порядковости оказываются, таким образом, различными для различных типов бесконечностей. Французский логик Л. Кутюра (1868—1914) справедливо придавал большое значение этому положению. «Прямолинейный отрезок, квадрат, куб,— писал он,— нисколько не отличаются друг от друга, как классы точек; они отличаются друг от друга только по порядку и расположению их точек, то есть, в конечном счете, по установленным между ними отношениям, потому что всякий порядок сводится к какой-пибудь системе отношений. Следовательно, сущность непрерывности многих измерений (как и линейной непрерывности) составляют собственно не ансамбли точек, а ансамбли отношений. Этот факт имеет очевидное философское значение; он означает, в общем, что пространство не простое многообразие, а многообразие расположенное...» [56, с. 115]. Скорее здесь можно сказать о том, что в бесконечностях (различных порядков) порядок расположения элементов имеет гораздо большее значение, чем в конечных множествах. Но ведь в общем виде это показал еще Кантор, обнаружив отсутствие коммутативности сложения для трансфинитных чисел. Здесь это положение получило лишь геометрическую конкретизацию и доказательство.

---

[6] На некоторую материалистическую тенденцию у Фреге обратил внимание Б. В. Бирюков [19, с. 160—164; 90, с. 529; см. также 107, с. 257—258]. Однако А. Чёрч считает Фреге «последовательным платоником» [122, с. 357].

Л. Кутюра был горячим сторонником актуальной бесконечности и широко пропагандировал учение Кантора еще в конце прошлого века. В последнее десятилетие жизни он активно защищал учение Кантора от критики А. Пуанкаре, вступив с ним в открытый спор [83, с. 1—148; 214, с. 815—835; 215, с. 17—34, 208—250].

В своем фундаментальном труде «О математическом бесконечном», написанном еще в 1896 г., Кутюра рассматривал различные стороны этой проблемы. Воодушевленный идеей «подлинной», т. е. актуальной, бесконечности, он защищал ее, показывая ее различную применимость в математике. Он объявляет необходимым специальный «анализ бесконечных чисел», где бесконечность рассматривается совершенно абстрактно, чисто арифметически, независимо от какого бы то ни было применения. При таком анализе обнаруживается, что бесконечность противоположна нулю. Кутюра получает это положение не только из понятия переменной величины, но и из соотношения: $m/0=\infty$ [150, с. 278—280]. Впрочем, добавлял он, при достаточном размышлении оказывается, что нуль является «не менее скандальным и таинственным предметом, чем идея бесконечности» [150, с. 280]. Рассуждения Кутюра относительно места нуля в числовом ряду и его соотношения с бесконечностью в какой-то мере диалектичны, хотя и не слишком глубоки, так как он старался не отходить от арифметики. Если бы он углубился при этом в философию, то мог бы по крайней мере повторить мысль Гегеля о конкретности каждого нуля в конкретной ситуации, что было бы полезно для проникновения этой идеи в анализ бесконечно малых. Но этого не случилось, хотя он и высказал мысль, согласно которой нулевая, например, длина в геометрии имеет вполне определенный смысл [150, с. 280].

Используя идею о пределе в обе стороны — к бесконечности и к нулю — Кутюра, как ему казалось, обнаружил парадоксы, «шокирующие» здравый смысл. Он действительно показал единство плоскости и точки как окружности с бесконечно малым радиусом; соотносительность нуля и бесконечности; неразличимость, единство всех фигур как в бесконечности, так и в нуле, поскольку их радиусы или стороны оказываются равными нулю или бесконечности. Это диалектика количественных отношений. Единство противоположностей здесь обнаруживается совершенно явно. Анализ этого единства — заслуга Кутюра. Он показал, кроме того, что без понятия актуальной бесконечности нельзя обойтись ни в геометрии, ни в общей арифметике. Его отдельные замечания интересны и даже остроумны. Он, например, показал, что так называемая аксиома Архимеда[7] недействительна не только для бесконечного числа, но и для нуля. Если мы изобразим эту аксиому так: $nB>A$, то, согласно Кутюра, бесконечность не может играть роль A, а нуль не может быть на месте B [150, с. 438].

Обнаружение соотносительности нуля и бесконечности — это тоже выявление некоторого диалектического момента. Но, к сожалению, до конца эту диалектику Кутюра не осознал, и парадоксы теории множеств, всплывшие вскоре после появления его философско-математической работы, заслонили «мирные» противоречия, показанные им в книге.

Л. Кутюра специально рассмотрел в одном из разделов своей книги все наиболее общие возражения против актуальной бесконечности, которые были высказаны математиками и философами в различные времена, и пытался опровергнуть их, используя работы Кантора. Ничего принципиально нового Кутюра здесь не дал, но по крайней мере способствовал некоторой популяризации и теории множеств, и понятия актуальной бесконечности. Он показал сложность и непривычность этого понятия в более пространной и популярной форме, чем это было сделано у самого Кантора.

---

[7] Вернее, это аксиома Евдокса Книдского [25, с. 10—11]. Одна из ее формулировок такова: «Как бы ни было велико число (или произвольный отрезок) A по отношению к числу (соответственно — отрезку) B, но всегда найдется такое n, что рано или поздно nB станет больше, чем A».

Некоторые результаты по развитию математического понятия актуальной бесконечности к началу XX в. давали возможность по-новому объяснить некоторые области математики и развивать их на этой основе (топологию, теорию комплексных чисел, проективную геометрию и другие) [56, с. 116—137].

В связи со сложностью, диалектической глубиной понятия актуальной бесконечности, внимание к которой чрезвычайно усилилось после появления теории множеств Кантора, новые логические идеи к началу нашего века буквально носились в воздухе. Неудивительно поэтому как то, что вскоре были обнаружены парадоксы актуальной бесконечности, так и то, что устранить их старались с помощью различных логических методов.

ДВА ПЕРВЫХ ПАРАДОКСА ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

То, что Кантор своей теорией множеств произвел революцию в математике, общеизвестно. Основной заряд при этом лежал в понятии актуальной бесконечности. Но в нем лежала и основа кризиса в математике, который разразился из-за парадоксов теории множеств [119, с. 28; 49, с. 7; 50, с. 225; 25, с. 95—128; 139, с. 470]. Описания сущности всех замеченных парадоксов теории множеств хорошо известны из математической и философской литературы. Однако здесь придется рассмотреть эти парадоксы, чтобы проанализировать их с точки зрения диалектической логики, так как имеющиеся в этом направлении попытки в философской и математической литературе нам кажутся недостаточными. Есть много общих утверждений о том, что актуальная бесконечность является виной тому, что теория множеств оказалась столь чревата антиномиями. Но рассматривают эти антиномии обычно с точки зрения формальной логики или даже лингвистики в общем плане, поэтому не всегда ясно, где же тут вина актуальной бесконечности. Надо добавить, что даже формально-логический анализ парадоксов в известной литературе обычно не отличается большой подробностью.

Здесь мы сначала кратко изложим смысл парадоксов теории множеств, а затем проанализируем их с точки зрения применения в них понятия актуальной бесконечности. Такой порядок изложения диктуется тем, что все парадоксы так или иначе логически связаны.

Первый парадокс обнаружил сам Кантор в 1895 г. и сообщил о нем в 1896 г. в письме к Гильберту. Этот парадокс связан с рассмотрением порядкового типа множества всех порядковых чисел. Он опубликован в № 11 «Отчетов математического общества Палермо» за 1897 год [213, с. 154—164] итальянским математиком Ч. Бурали-Форти (1861—1931), который открыл этот парадокс независимо от Кантора, вследствие чего он и называется его именем. Содержание его заключается в том, что при образовании множества всех порядковых чисел образуется новый порядковый тип, которого еще не было среди «всех» трансфинитных порядковых чисел, существовавших до образования множества всех порядковых чисел. Исходя из общей теории порядковых чисел Кантора, этот парадокс можно сформулировать так. Вполне упорядоченное множество[8] всех порядковых чисел имеет порядковое число, которое больше любого из порядковых чисел, составляющих это множество, а значит, больше любого порядкового числа. Но, включая это наибольшее порядковое число в множество всех порядковых чисел, мы тем самым создаем новое множество и новое порядковое число, что обязывает нас образовывать новое множество всех порядковых чисел, включающее в себя и только что образованное, и так далее до бесконечности. Получается, что нет никакого большего порядкового числа [49, с. 39; 50, с. 91; 120, с. 65; 128, с. 187—192; 218, с. 1—17; 206, с. 162—169; 184, с. 194—195].

Второй парадокс открыл тоже Кантор в 1899 г. Он касается отношения множества всех множеств, или множества всех трансфинитных кардинальных чисел, и носит имя Г. Кантора. Авторское изложение его в печати появилось только в 1932 г., когда была опубликована переписка Кантора, хотя известен он был уже в начале нашего века по другим публикациям [119, с. 19]. Получается, если опустить чисто математическое, формализованное изложение, что одинаково логично доказываются два противоречащих одно другому положения: как то, что мощность множества всех подмножеств множества M больше мощности самого M, так и то, что это неверно. Первое утверждение из этих двух является просто известной теоремой Кантора [9]. Второе же положение вытекает из следствия другой его теоремы (см. следствие A теоремы A [49, с. 19]). Мощность всех подмножеств множества M обозначается: $\overline{\overline{UM}}$. В формулах этот парадокс будет выглядеть так: по теореме C [49, с. 21—22] $\overline{\overline{UM}}>\overline{\overline{M}}$; а так как рассматриваемое нами M есть множество *всех* множеств, а UM — только некоторое множество множеств (т. е. множество всех подмножеств M), то UM входит в M, т. е. $M \subseteq M$. Отсюда — по следствию A из теоремы A (если $M \subseteq N$, то $\overline{\overline{M}} \leqslant \overline{\overline{N}}$ [45, с. 19]), а также в соответствии с тем, что три отношения между множествами M и N: $\overline{\overline{M}}<\overline{\overline{N}}$, $\overline{\overline{M}}>\overline{\overline{N}}$, $\overline{\overline{M}}=\overline{\overline{N}}$ — исключают друг друга, получается, что может быть верным только одно из доказанных положений: или то, что $\overline{\overline{UM}} \leqslant \overline{\overline{M}}$, или то, что $\overline{\overline{UM}}>\overline{\overline{M}}$ [49, с. 39]. Оказывается же, что мощность множества M одновременно и больше и меньше мощности M, что логически недопустимо и по смыслу, на первый взгляд, непонятно. Возможны несколько иные способы обнаружения этого парадокса на основе теории множеств, с применением других понятий и теорем [49, с. 39—40].

---

[8] Вполне упорядоченным называют упорядоченное множество, когда оно само и всякое его правильное, т. е. непустое, подмножество имеют первый элемент.

Оба описанных парадокса имеют общую логическую основу, на которую чаще всего и обращают внимание. Действительно, с логической точки зрения они аналогичны древнему парадоксу типа «Лжец». Сущность его, как известно, в том, что высказываемое суждение обращено не только на нечто объективное по отношению к этому высказыванию, но также и на него самого. Имеет отношение к математическим парадоксам, о которых здесь идет речь, и парадокс о крокодиле (или сфинксе). Математики иногда приводят оба эти логических парадокса [49, с. 41—42]. Однако они при этом ограничиваются одним лишь изложением их или указанием только на то, что в подобных логических парадоксах, как и в антиномиях теории множеств, высказывание обращается на самое себя, или, иначе, является элементом того, о чем высказано суждение. Видя только логическую сторону в математических парадоксах, некоторые авторы даже считают, что бесконечность в них ни при чем, и дело заключается именно и только в какой-то логической ошибке, в логических заблуждениях [221, с. 627—650; 30, с. 350; 119, с. 19]. Однако, пожалуй, большинство математиков понимает, что дело заключается в применении понятия актуальной бесконечности, которое чревато противоречиями. Так, А. Пуанкаре писал в 1906 г. в одной из своих статей [203], что именно актуальная бесконечность порождает парадоксы. Рассел показал, что в математической логике парадоксы типа «Лжец» образовываются как следствие непредикативных определений, т. е. таких, которые совершаются через самих себя, иначе говоря,— с помощью порочного круга. В связи с этим Пуанкаре и указывал, что причина парадоксов заключается в «вере» в актуальную бесконечность, поскольку «вера в существование актуальной бесконечности... делает необходимым эти непредикативные определения» [293, с. 316].

---

[9] Теорема Кантора: «Для любого множества M справедливо соотношение $\overline{\overline{M}}<\overline{\overline{UM}}$» [49, с. 21], где $\overline{\overline{M}}$ – мощность множества M; $\overline{\overline{UM}}$ — мощность множества всех подмножеств множества M.

Но все те математики, которые приводят парадокс «Лжец» как логическую аналогию парадоксам Бурали-Форти, Кантора и других, не идут до конца в этом анализе. А ведь тут дело еще заключается в том, особенно в парадоксе с крокодилом (или сфинксом), что логический процесс оборачивается самой настоящей дурной бесконечностью, которая должна стать пыткой для родителя ребенка, украденного у него. Условием возвращения ребенка является отгадывание, отдаст ли его крокодил. Если родитель скажет, что ему не отдадут ребенка, а это, очевидно, и входит в намерения укравшего, то тогда, по условию, ему должны отдать его. Но как только акт передачи ребенка совершается, предсказание оказывается неверным, ибо действительность теперь такова, что ребенка отдали, а в предсказании не было сказано о его возвращении родителю. По этой причине приходится возвратить ребенка похитителю. Но после этого ситуация восстанавливается, и, по условию, ребенка снова должны отдать родителю и т. д. до бесконечности.

Изменчивость того предмета, высказывания о котором рассматриваются, обычно не принимается во внимание в логике. Только при таких особых обстоятельствах, как в случае данного парадокса, явно обнаруживается изменчивость того, о чем высказывается суждение. К тому же это еще осложняется тем, что само высказывание меняет предмет, на который оно направлено. В первых двух парадоксах теории множеств положение аналогичное: сам акт образования порядкового типа множества всех порядковых чисел или множества всех множеств создает новую ситуацию, новый предмет высказывания. Это новое должно быть включено в то, что существовало раньше. Но тем самым снова создается новый объект, и т. д. до бесконечности. «Схваченная бесконечность», т. е. актуальная, обнаруживает свою противоречивость явным образом, и это закономерно. Единственное, что можно «поставить в упрек» актуальной бесконечности в данных парадоксах, так это то, что она оборачивается в них потенциальной, даже дурной бесконечностью. В самом деле, нельзя ведь сказать, что совершенно невозможно образовать множество всех множеств или порядковый тип множества всех порядковых чисел. Но практически в каждый данный момент это оказывается невозможным, а возможным только в потенции. Получается, что процесс образования таких «объектов» возможен, а окончание его невозможно. Но тогда выходит, что актуальной бесконечности действительно нет, а есть только потенциальная. Однако парадоксы потому и возможны, что математики исходили из «целой», «всей» бесконечности, т. е. из актуальной! Тут можно вспомнить слова Кантора о том, что сама потенциальная бесконечность возможна только потому, что предполагается актуальная. Мы не могли бы так уверенно осуществлять потенциально бесконечный процесс, если бы не было убеждения, что мы действительно имеем впереди заранее «обеспеченную», *всю* бесконечность [197, с. 64].

Но если бы мы могли однократно образовать множество всех множеств и т. п., то это означало бы, что мы пришли к концу бесконечного, «оконечили» его. Очевидно, актуальная бесконечность выступает через потенциальную, как обнаружение неограниченных возможностей изменения, движения. Конечное выражает статику, бесконечное — динамику, движение, изменчивость. Точнее говоря, движение здесь происходит благодаря наличию противоречия бесконечного и конечного: конечное полагается, но сейчас же снимается и т. д. При этом, какую бы качественно своеобразную сторону количественного изменения мы ни взяли — порядок или величину,— везде обнаруживается возможность бесконечного движения.

Если подвести итог тем диалектическим моментам, которые обнаруживаются в этих двух парадоксах, то получается следующее. *Первое*. В описанных парадоксах нарушено обычное и, пожалуй, неписаное правило: четко разделять «сферы» субъекта и предиката. Происходит чуть ли не подмена одного понятия другим. В суждении создается существенное изменение самим актом образования этого суждения. Обозначим все существующие множества бесконечным рядом *a*, *b*, *c* ... и т. д. Напишем суждение: «*a*, *b*, *c* ... и т. д. есть совокупность всех существующих множеств». Можно обозначить эту совокупность через *M* и написать суждение, не нуждающееся даже в простейшем акте обобщения: «*M* есть множество всех множеств». Но, образовав множество *M*, мы тем самым создаем новые отношения между субъектом и предикатом, ибо субъект теперь оказывается одним из множеств, но не охваченных в предикате: ведь в бесконечном ряду *a*, *b*, *c*,... и т. д. отсутствует *M*! Приходится поместить субъект в предикат, что недопустимо при требовании четкости их разделения. Более того, такая акция, совершенная однократно, нас не спасает. Мы должны — поскольку каждый раз меняем не только предикат, но вслед за ним и субъект, и отношение субъекта к предикату — восстанавливать положение. Но никаким конечным числом «восстановительных действий» сделать это не удается. В результате мы попадаем в парадоксальное положение, подобное тому, которое присуще всякому механическому движению, поскольку оно есть и нахождение, и ненахождение в каждой данной точке пути. Множество всех множеств — можно сказать, по аналогии — и существует в каждый данный момент, и не существует. Подобное «смешение» субъекта с предикатом формальной логикой ни в коем случае не предполагалось. Выражаясь на языке современной логики, причина этого типа парадоксов связана с непредикабельностью, о чем будет сказано позже.

Второе. Обычно в формальной логике предполагается, что в процессе рассуждений и субъект и предикат сохраняют свой объем и свое содержание. Обычно сохраняется четкое разделение уровней и отсутствует возможность их смешения. В теории же множеств при рассмотрении всех множеств и т. п. происходит процесс перехода понятий из одной категории в другую. В результате субъект и предикат оказываются не соответствующими по объему своему содержанию, своему смыслу. Они просто нечетко разделены, поскольку при предикате, имеющем столь широкий объем как «множество всех множеств» и т. п., субъект должен входить в этот предикат. Подобное смешение, отождествление противоположностей в формальной логике никак не могло предполагаться. Нарушается закон тождества, так как субъект оказывается и на своем месте, и в то же время включен в предикат: субъект не остается субъектом, и предикат не остается тем же предикатом. Нарушается также закон исключенного третьего, так как субъект и предикат являются и самими собой, и чем-то еще другим: их содержание двойственно, неопределенно, объем тоже изменчив. И все это потому, что в теории множеств, в актуальной бесконечности отражено движение, изменение в явном виде, а формальная логика этого не допускает. Если должно быть изменение, то где-то за пределами суждения, а не внутри него. С движением, с диалектическими переходами понятий, которые врываются внутрь суждения, у формальной логики нет средств справиться.

Третье. Традиционная логика всегда предполагает, хотя это нигде и не оговорено, что и субъект, и предикат имеют вполне четкие, конечные границы как в смысле объема, так и в смысле содержания. В суждении же «*M* является множеством всех множеств» предполагается абсолютная безграничность, беспредельность объема и содержания понятий. Казалось бы, логике не страшны субъекты и предикаты, к которым присоединяется квантор «все». Огромное число суждений, вполне «правомерных», начинается именно с этого слова, среди них и самое классическое: «Все люди смертны». Это так. Но ведь при этом и каждый человек, и общечеловеческие свойства вполне конечны, доступны, если иметь в виду только живущих и умерших людей. Тут есть за что ухватиться. Положение же со множествами совершенно иное. Само понятие множества по своей абстрактности уже совершенно необозримо. Но это чрезвычайно широкое по объему понятие, кроме того, еще усиливается квантором «все», получая совершенно ничем не ограниченный объем. Недаром А. Пуанкаре так восставал против слова «все» в применении к бесконечности, т. е. против актуальной бесконечности. «Слово *все* имеет вполне ясный смысл,— пишет он,— когда речь идет о конечном числе предметов» [203, с. 316]. Когда же имеется в виду бесконечное, разъясняет Пуанкаре, то понятие N, которое зависит от всех предметов бесконечности A, может быть запятнано порочным кругом, «если среди предметов A имеется такой, который не может быть определен без введения самого понятия N» [203, с. 316]. Итак, Пуанкаре против актуальной бесконечности, потому что ее введение приводит к непредикативным определениям, потому что она против логики! Но дальше этого Пуанкаре, к сожалению, не продолжает ни логического, ни тем более философского анализа причин разлада актуальной бесконечности с логикой. А дело тут, в частности, в том, что нарушается — опять-таки молчаливо — признаваемая неприкосновенной логическая иерархия понятий и их «рангов» по степени абстрактности, или широте объема. Можно соблюдать этот «табель о рангах», когда понятия стоят по местам, как солдаты, и не передвигаются «в чинах», не обнаруживают громко противоречий между собой, требующих изменений. Но когда все наоборот, то один уровень переходит в другой, в бесконечности все конечное уравнивается, и поневоле нарушается логическая строгость и стройность. Рассел понял это и предложил свою теорию типов, которая подробно будет изложена ниже. Но искусственным введением строгой иерархии в логике не ликвидируешь переходы и смещения, которые неизбежны.

Четвертое. При всех этих «переходных» ситуациях обнаруживается связь форм и законов логики с содержанием понятий и суждений, с закономерностями движения самого знания, т. е. с процессами обобщения, изменения и т. д. Но эта связь не предусмотрена формальной логикой. Поэтому так и получается, что нарушаются все основные логические законы. Закон тождества нарушается, когда обнаруживается нетождественность себе субъекта и предиката; закон противоречия — когда с одинаковым правом выводятся два противоречащих одно другому суждения; закон исключенного третьего — когда это третье приходится признавать, а не исключать, поскольку ни первое, ни второе не могут быть признаны одно без другого, ибо они оказываются одинаково правомерными. Таков диалектический смысл двух первых парадоксов множеств. Однако они были только первыми, но вовсе не последними.

ТРЕТИЙ ПАРАДОКС

Третий парадокс был открыт в 1902—1903 гг. одновременно Б. Расселом и Э. Цермело [160, с. 253—265; 220, с. 79—80, 101—107; 30, с. 365—388; 234, с. 234—244]. Этот парадокс заключается в том, что оказывается невозможным однозначно ответить на вопрос, существует ли правильное множество[10] всех правильных множеств. Действительно, множество T может объединять все правильные множества. Но в таком случае возникает вопрос относительно него самого: поскольку оно является правильным, оно должно быть включено в самое себя. Но, включенное в себя самое, оно перестает быть правильным и должно быть исключено из множества всех правильных множеств как неправильное. Получается вывод: если множество T правильно, оно должно быть элементом самого себя, но если оно является элементом самого себя, то оно не должно быть включено во множество T. Иначе говоря, если мы предполагаем, что $T \in T$, то приходим к выводу, что — при начальных условиях — $T \overline{\in} T$. Если же мы исходим из положения, что $T \overline{\in} T$, то приходим к выводу: $T \in T$. Кратко выраженное, это будет выглядеть как совмещение двух противоречивых, несовместимых по закону исключенного третьего суждений:

$$\text{Если } T \in T, \text{ то } \overline{T \in T}$$
$$\text{Если } \overline{T \in T}, \text{ то } T \in T$$

---

[10] Правильным множеством называется множество, которое не содержит самое себя в качестве своего элемента.

Этот парадокс Клини выводит логически из парадокса Кантора, что важно для понимания его сущности. Нужно также отметить, что парадокс Рассела — Цермело нанес буквально душевную травму Г. Фреге. Он получил от Рассела письмо с сообщением об этом парадоксе тогда, когда книгу «Основания арифметики», в которой Фреге использует теорию множеств, уже заканчивали печатать. Фреге написал по этому поводу печальное послесловие, где, в частности, отмечает, что для своего утешения он может принять латинскую пословицу: «Solatium miseris, socio habuisse malorum» (Утешением несчастному является общее несчастье) [160, с. 253], так как речь идет не только о его, Фреге, способе обоснования арифметики, а и «о возможности логического обоснования арифметики вообще» [160, с. 253]. Фреге сразу понял, что вопрос об этом парадоксе касается логического закона исключенного третьего, и писал уже о недействительности этого закона для некоторого класса понятий [160, с. 254]. Но, конечно, у него еще не было такой решительности или такого отчаяния, которое позволило интуиционистам несколько позднее «устранить», «отменить» закон исключенного третьего.

Сам Рассел в «Принципах математики» не только подробно излагает логическую сущность своего парадокса, развивая теорию предикабельных определений, но уже вводит понятие типа и с его помощью пытается спасти положение. Тут же он говорит о том, что можно было бы для избавления от противоречия отменить «понятие *всех* членов или *всех* классов» [220, с. 105]. Но такое ограничение ставит под удар вообще все положения математики. Действительно, было бы нелепо использовать понятия «некоторых» членов или «каждого» члена, но запретить понятие «всех» членов! [220, с. 105].

Однако Рассел, как, впрочем, и другие математики, в основном показывает только то, *как* логически образуется его парадокс, а вопрос о том, *почему* он получается, даже не ставится. Очевидно, математикам кажется, что за логическим подробным анализом больше нечего уже вскрывать в парадоксах. Но на самом деле остается еще совершенно не тронутой философская основа парадоксов. Правда, Рассел в «Принципах математики» пишет, вслед за логическим анализом своего парадокса, что вовсе не какая-нибудь своеобразная философия впутывает нас в эти противоречия. Они «выскакивают прямо из здравого смысла и могут быть разрешены только отказом от некоторых допущений здравого смысла. Только философия Гегеля,— добавляет Рассел с некоторой иронией,— которая вскормлена на противоречиях, может оставаться индифферентной, потому что она находит подобные проблемы всюду. Во всякой другой доктрине прямо требуется дать ответ по поводу противоречий, иначе она должна признать себя бессильной. К счастью, насколько мне известно, иной подобной трудности не обнаруживается в какой-нибудь другой части основ математики» [220, с. 105]. Но упоминание Гегеля остается лишь упоминанием. Его «доктрина» не принимается и даже пе рассматривается как возможная и приемлемая. Слишком уж противоречит она тому, что издавна принято в математике, особенно принципу непротиворечивости. В 1901 г. в статье «Математика и метафизика» Рассел писал о том, что парадоксы теории множеств ведут неизбежно к диалектическому методу Гегеля. Но, конечно, он не мыслил принятие для себя этого метода [225, с. 80—81]. Избегая философии, Рассел тут же пытался показать, что математика «практически идентична символической логике» [220, с. 106].

Философская сущность парадокса Рассела заключается примерно в том же, в чем и сущность двух первых парадоксов: образование правильного множества всех правильных множеств производит существенные изменения в самом этом множестве. Происходит как бы самодвижение понятий. Образовывая множество всех правильных множеств, мы тем самым создаем новое правильное множество. Затем мы впадаем, как известно, в неразрешимую ситуацию, при которой не знаем, что нам делать: включать вновь полученное множество, как правильное, в самое себя или нет, поскольку это включение делает его неправильным. Но эта ситуация свидетельствует лишь о том, что здесь более адекватно отражена противоречивая сущность движения, чем в других случаях. Произошло это потому, что движение совершается тут же, не только «на наших глазах», но и нашими руками, вернее, нашей головой. При этом уже сразу нарушается закон тождества, поскольку множество всех правильных множеств у нас оказывается то правильным, то неправильным, в зависимости от того, совершаем мы акт его включения в самое себя или нет.

То, что после этих логических манипуляций у нас нарушается закон исключенного третьего, это уже только следствие, а в основе лежит именно нарушение закона тождества, чего обычно не замечают. Но этот закон и не может не быть нарушен, поскольку именно в понятиях, в самом процессе рассуждения происходит изменение содержания главного рассматриваемого понятия. Такое изменение в понятиях необходимо, поскольку речь идет о пределе бесконечности, т. е. обо *всех* членах бесконечного ряда. Разумеется, эта совокупность не может не разворачиваться в бесконечное движение, если мы пытаемся построить ее обычным, конечным способом, по обычным логическим законам, действительным по отношению к конечным, неизменным объектам. С бесконечностью надо обращаться по иным законам, чем законы конечных вещей, и тогда возникают совсем иные проблемы, чем в случае применения частичных мер по устранению парадоксов. Если же пытаются оставаться в пределах «конечной» логики, то тогда приходится ухищряться, чтобы как-нибудь спасти эту логику.

Сам Кантор понимал, хотя и в абстрактной форме, что бесконечность — это существенно, качественно иной «предмет», чем любая конечная сущность. Бесконечность как бы ускользает от нашей попытки «оконечить» ее, заключить в рамки обычной логики; ускользает и показывает путь к бесконечному движению, с которым она связана необходимо, принципиально, от которого неотделима, как от другой своей стороны. Очевидно, вследствие всеобщности, бесконечность и движение смыкаются, и когда проявляется сущность одной из этих сторон мира, тут же обнаруживает себя и другая его сторона. Действительно, если мы начнем свой анализ с движения, то обязательно логически наталкиваемся на бесконечность точно так же, как при анализе бесконечности наталкиваемся на движение. Еще раз тут в мышлении обнаруживается объективность наших логических законов, приводящих нас даже помимо нашей воли к границе тех форм мысли, которые мы употребляем. Содержание наших мыслей о бесконечности таково, что оно как раз взрывает ограниченность примененных форм мысли. Содержание мысли, понятий демонстрирует здесь свою первичность, свою «ведущую» роль по отношению к формам, законам мысли. Именно потому стало возможно такое положение, что совсем «молодое» содержание, связанное с понятием бесконечности, взорвало старые, испытанные логические формы, которые и сами обнаружили в этом случае свою содержательность и невозможность для них оставаться всегда только бессодержательной формой.

Нужно отметить, что парадокс Рассела — Цермело отличается от первых двух парадоксов. Отличие состоит в том, что задача здесь заключается в образовании не всех множеств, а только множеств определенного рода: «правильных». Кроме того, ограничение относится и ко множеству, которое должно охватить *все* правильные множества: оно должно быть тоже правильным. Но при этом опять-таки выступает на поверхность качественное своеобразие бесконечности, даже вообще количества. В математике привыкли к тому, что количественный охват всегда, в любом масштабе возможен, к тому, что в области количественных отношений качество безразлично. Но это совсем не так, хотя в области конечных чисел качественная сторона количества часто остается скрытой. В области же бесконечного качество выступает на поверхность уже потому, что бесконечное отличается от конечного качественно. Это обнаруживается тем более, если задается множество не только как особое количество, а как обусловленное определенными свойствами, как, например, правильное множество. При этом почему-то заранее предполагается, что имеется «математическое» или логическое право задавать какое угодно множество каких угодно множеств. Есть видимость, что позволять это должна абстрактность предметов, с которыми манипулируют здесь. Но это именно только видимость, потому что на самом деле и в абстрактных областях невозможно получить некоторые результаты, особенно с заранее заданными свойствами. Так, мы не можем получить квадратный корень из отрицательного числа, даже если его абсолютная величина представляет собой квадрат целого или дробного числа. Вернее, можем, но в то же время под знаком радикала у нас остается при этом всегда —1. Следовательно, отрицательные числа по самой своей сущности таковы, что из них не может быть безоговорочно извлечен положительный корень. Это объясняется качественной спецификой отрицательной величины. Если анализ продолжать, то причину невозможности извлечь корень из отрицательной величины, вероятно, можно будет обнаружить и в специфике тех объективных свойств и сторон, которые отражаются отрицательными величинами.

Точно так же нелепым является требование образовать правильное множество всех множеств, ибо само это требование содержит в себе противоречие. Это требование фактически заключает в себе необходимость создания ограниченного множества всех ограниченных множеств, т. е. оно противоречиво по самой своей сущности. Ведь, с одной стороны, правильных множеств явно бесконечное, неограниченное количество. Но, с другой стороны, они, при всей бесконечности своего количества, представляют собой лишь часть бесконечного количества всех бесконечных множеств. Именно это противоречие, очевидно, и обусловливает противоречивый результат попытки создать правильное множество всех правильных множеств. Но главное, вероятно, все-таки в том, что бесконечное есть выход за любые определенные пределы, и как только мы пытаемся «оконечить» бесконечность, так обнаруживается невозможность этого, и она начинает проявляться как «дурная». Однако при множестве всех множеств мы все-таки имеем прогресс, который заключается в том, что образовываются все новые и новые множества, хотя они и не дают нового качества. При процессе же образования правильного множества мы просто топчемся на месте, совершая как бы колебательные движения. Это происходит потому, что мы то включаем во множество всех правильных множеств, то исключаем из него само это множество всех правильных множеств. Этот процесс бесконечен, как и создание множества всех множеств, но он еще безотраднее и «дурнее», ибо вовсе уж никуда не уводит нас, а составляет лишь колебательное движение.

Так логические возможности и стимулы создают в абстрактнейшей области науки — теории множеств — аналогию двух всеобщих типов движения: колебательного и поступательного. Нельзя сказать, что тут бесконечность обнаруживает перед нами чисто количественную сторону движения. Во-первых, сами эти два вида движения представляют собой качественно своеобразные виды движения. Во-вторых, внутри каждого из этих видов движения имеются также качественно различные моменты.

Первым можно отметить момент остановки, когда множество всех множеств включено в самое себя (соответственно — правильное множество всех правильных множеств). Этот момент существует как конечный пункт данного этапа логического процесса. При этом образуется множество по мощности как бы выше своей собственной мощности. Это и дает возможность выделить второй момент, момент нового множества, а во втором случае — еще и момент нелепости (с точки зрения первичной задачи) полученного результата из-за превращения правильного множества в неправильное путем включения в самое себя. Отсюда можно выделить и третий момент, как момент снятия первого положения, момент перехода к новому множеству или — во втором случае — перехода к прежнему множеству.

ЕЩЕ ТРИ ПАРАДОКСА

Четвертый парадокс обнаружен в 1905—1906 гг. Ришаром и Диксоном и назван именем Ришара [217, с. 541—543; 126, с. 295—296; 222, с. 18—20, 317—319]. В более или менее кратких и популярных изложениях парадоксов теории множеств парадокс Ришара заменяется его упрощением, о котором будет сказано ниже. Суть парадокса Ришара заключается в противоречии счетного и несчетного бесконечных множеств. Предлагается расположить 26 букв французского алфавита попарно, по трое, по четверо и т. д., во всех возможных для них сочетаниях. Среди таких сочетаний любого числа слов будет и определение любого действительного числа. «Зачеркнем из этих комбинаций все те,— пишет Ришар,— которые не являются определениями чисел» [216, с. 295]. Перенумеруем все числа, определяемые с помощью оставшихся комбинаций. Каждое из них определяется через конечное число слов. Все они образуют счетное множество, поскольку их можно перечислить. Способ перечисления дается уже таблицей сочетания букв (по двое, по трое и т. д.),— ведь вычеркивание комбинаций, не являющихся определениями каких-либо чисел, не уничтожает возможности перенумеровать все определения.

Множество определений чисел с помощью конечного количества слов, казалось бы, охватывает все возможные действительные числа. Однако оказывается, что можно построить такое число, которое не относится к образованному нами множеству. Ришар определяет такое число следующим конечным количеством слов: «Пусть *p* будет

n-ный десятичный знак n-го числа множества E[11]; образуем число, имеющее нуль в целой части, и в n-ном десятичном знаке — $p+1$, если p не равно ни восьми, ни девяти,— и единицу в противном случае. (Иначе говоря, этот знак образуется с помощью циклического сдвига цифр: за 8 идет 9, а за 9 — 0, за нулем — 1 и т. д.)» [216, с. 296]. Число, образованное таким способом (обозначим его, как и Ришар, через N), не относится к множеству E, поскольку n-ное число из этого множества должно было бы иметь на n-ном месте знак p, а не $p+1$ [216, с. 296; 162, с. 64—65]. Следовательно, получается противоречие, так как по построению множество E содержит *все* определения чисел, составленные из конечного числа слов, а приведенное определение числа N дано совершенно конечным количеством слов.

Но это не все. Дело осложняется еще и тем, что, присоединив число N к множеству E, мы получаем снова счетное множество, как это легко доказывает Ришар. Действительно, мы можем включить число N в некоторый ряд k множества E, отодвигая все другие ряды после k дальше. Как видим, счетность множества не исчезает. Но тем же способом, с помощью которого мы построили число N, можно построить и число N', которое не будет относиться к модифицированному множеству E.

Таким образом, разрешение этого парадокса, как и всех других, вытекающих из теории множеств, как бы уходит в бесконечность. К тому же здесь обнаруживается еще одно противоречие: от прибавления конечного числа бесконечное множество не меняет даже своего характера. Оно остается счетным после прибавления конечного числа, если было таковым до этого прибавления.

Упрощенный вариант парадокса Ришара дал Берри и опубликовал впервые Рассел в 1906 г. [119, с. 21; 222, с. 29—53; 221, с. 633, 645]. Эта антиномия достаточно известна. Вот два частных ее выражения: требуется назвать «наименьшее число, не названное в этой книге» (подобную формулировку дает Кольман [50, с. 92]). Противоречие в том, что, с одной стороны, это можно сделать, так как есть ведь наименьшее число, названное в этой книге. Исходя из него, можно определить и наименьшее неназванное. Но тут мы наталкиваемся на несчетность континуума, так как между любыми двумя числами всегда можно «вставить» еще бесконечное множество «промежуточных» чисел. С другой стороны, дело еще в том, что даже если мы могли бы назвать это число, то оно тут же переходило бы из класса не упомянутых в класс упомянутых в книге.

---

[11] Множество E — это множество всех чисел, определяемых конечным количеством слов по способу созданной Ришаром таблицы.

Другая формулировка антиномии Берри такова: существует ли «наименьшее натуральное число, которое нельзя назвать посредством меньше тридцати трех слогов» [49, с. 41; 50, с. 92; 119, с. 21]. Суть и тут та же: наименьшее число вообще нельзя назвать, так как при этом мы опять сталкиваемся с несчетностью действительных чисел. Но оно уже названо в самом требовании, хотя и в общем виде. Это возможно, так как в русском языке не бесконечное число слов, и любое определение должно состоять из конечного числа слов.

Нужно отметить, что в парадоксе Берри обычно не замечают, что дело не только в логическом «обращении на себя», но и в бесконечности, в ее особых свойствах. Бесконечность обнаруживает здесь себя достаточно явно. Во-первых, проявляется то ее свойство, что от прибавления даже только к счетному бесконечному множеству любого конечного числа бесконечность не только не увеличивается количественно, но и не меняет своего характера, т. е. не перестает быть счетной. Во-вторых, за счетностью образованного Ришаром множества здесь явно просвечивает и несчетное, континуум. Таким образом, этот парадокс обнаруживает качественное отличие как конечного от бесконечного, так и счетной бесконечности от несчетной, а не только известную с древности логическую ситуацию, когда суждение оборачивалось на самое себя.

Пятая антиномия — это парадокс Греллинга, который он обнаружил вместе с Нельсоном [177, с. 301—328, 331—334]. Этот парадокс имеет отношение не только к теории множеств и бесконечности. Но авторы его исходили из парадокса Рассела, изложенного выше, и потому рассмотрение его здесь уместно. Речь идет о том, что слова (или знаки), выражающие то или иное свойство, могут иметь сами это свойство или не иметь. Так, слово «бесконечный» конечно, а слово «односложный» многосложно и т. д. Получается видимость парадокса, потому что, например, «односложное», чтобы стать односложным, должно не быть словом «односложное». Но ведь на самом деле в языке всегда различают: (1) слова как средство выражения понятий, являющихся обычно отражением чего-то лежащего вне самих слов, и (2) слова как предмет исследования. При таком различении становится ясно, что (1) и (2) представляют собой совершенно различные явления, и смешивать их нельзя. Таким образом, философская сущность данного парадокса в том, что смешивают отражение и отражаемое. Недаром Куайн говорил о том, что смешение знака и объекта есть «первородный грех» [209, с. 15].

Если у чувственных образов существует внешнее подобие с объектами, которые они представляют, то понятия и выражающие их слова вовсе не должны сохранять внешнее подобие с отражаемым. Приписывать необходимость присутствия у слов тех свойств, которые они выражают, по меньшей мере нелепо. Может быть только случайным совпадением то, что слово обладает тем свойством, которое оно обозначает. Так, слово «многосложное» и само является многосложным, но это только совпадение. Необходимостью это не может быть и не должно быть. Наоборот, понятие и объект, слово и объект в принципе по своей природе отличны одно от другого и даже противоположны одно другому. Ведь объект обладает материальной природой, а понятие — духовной как отражение, как элемент сознания. Слово как материальная оболочка (звуковая или зрительная, начертательная), как воплощение понятия имеет вследствие этого возможность совпадать со смыслом своего значения. Но, во-первых, это происходит только тогда, когда смысл высказываемого относится к словам (многосложность, характер звучания и т. п.). Во-вторых, это совпадение может существовать для данного случая только в одном языке, а в другом — не существовать, что указывает на случайность и несущественность такого совпадения.

«Парадокс» вызван тем, что опять-таки не видят диалектического противоречия. Оно здесь заключается в том, что слово имеет двойственную природу. С одной стороны, оно имеет смысл, содержание, как отражение чего-то объективного. С другой — оно само материально, как звучание или как написанное краской, пастой, как углубление на дереве или камне и т. д. В «парадоксе» же Греллинга — Нельсона эта двойственность формы и содержания слова совершенно игнорируется (типичное беспечное отношение к философским вопросам!), поэтому получается недопустимое смешение, нарушение логического закона тождества. Незаметно это потому, что есть видимость сохранения одного и того же предмета рассуждения, поскольку сохраняется один и тот же термин, одно и то же слово. Однако на самом деле предметом рассмотрения выступает то слово, то понятие. Такое разделение является не искусственным, а совершенно необходимым, потому что таково действительное положение вещей. Когда разделение совершено, то никакого парадокса не обнаруживается в суждении типа: «Односложное» не является односложным.

Не происходит ничего ужасного даже тогда, когда мы обозначаем термином «гетерологический» [12] все те прилагательные, которые «не обладают называемым каждым из них свойством» [119, с. 22]. Френкель и Бар-Хиллел пишут, что при этом «мы сразу же обнаруживаем, к своему ужасу, что прилагательное «гетерологическое» гетерологическое в том и только в том случае, если оно не гетерологическое» [119, с. 22]. В таком варианте «парадокса» дело усложняется еще тем, что здесь рассматривается именно то слово-понятие, с помощью которого дается общая характеристика отношения слова и понятия. Вследствие этой путаницы парадоксальность получается еще бо́льшая. На самом деле здесь есть подобие парадокса типа «Лжец», поскольку и предикат — «гетерологическое», и субъект — «гетерологическое». Дело еще затемняется и тем, что из самого прилагательного «гетерологическое» непосредственно нельзя понять, относится это свойство к самому слову или нет. Объясняется это тем, что прилагательное «гетерологическое» слишком абстрактно, а выяснить «гетерологичность» или «автологичность» того или иного понятия-слова можно только тогда, когда есть способ сопоставить смысл понятия, содержание его, выраженные данным словом, с внешними свойствами этого слова. Невозможно решить вопрос о гетерологичности любого слова, выражающего абстрактное понятие. Например, невозможно определить, гетерологичны ли прилагательные «математический», «научный», «философский», «логический», «внешний», «внутренний» и множество других.

---

[12] Гетерологическое слово (буквально — «разносмысловое») — такое, содержание которого нельзя отнести к самому этому слову как совокупности знаков.

Часто приводят пример с прилагательными «абстрактное» и «конкретное» и утверждают, что будто бы первое из них автологическое, а второе гетерологическое, так как «абстрактное» абстрактно, а «конкретное» не конкретно, а тоже абстрактно [163, с. 25; 86, с. 68]. Но здесь опять происходит смешение слова и понятия. Конечно, и то и другое прилагательное как понятия абстрактны. Но как слова, выражающие эти понятия, они не могут быть ни абстрактными, ни конкретными (в смысле общеконкретности, как результат синтеза абстракций). Слова всегда чувственно-конкретны, и потому к ним применимы или общие чувственные характеристики (черный, красный, горячий, большой), или такие — опять-таки простейшие, на уровне чувственного восприятия,— которые могут характеризовать только слова: многосложный, односложный, французский, русский, длинный, короткий и т. п. И тут ясно, что в зависимости от конкретного выражения одного и того же слова, от различной материальной оболочки оно может быть то гетерологическим, то автологическим. Так, слово «громкое» может быть произнесено то громко, то тихо; слово «горячее», только что отлитое в типографии, может быть действительно горячим, не говоря о переносном смысле понятия горячего; слово «маленький» на русском языке — гетерологическое, а на немецком (klein) или на французском (petit) могут считаться и негетерологическими и т. д.

Для слов же, выражающих абстрактные понятия, можно принять только общую формулу: слово (прилагательное) *«М»* тогда и только тогда гетерологическое, когда оно не обладает свойством *М*. Если подставить в эту формулу-определение вместо *«М»* любое абстрактное понятие, то мы получим по видимости противоречивое суждение. Но на самом деле оно непротиворечиво. Надо только обратить внимание на то, что одно и то же слово в кавычках и без них имеет различное содержание: в кавычках — это слово, а без них — понятие. Итак, получается следующее: «математическое» тогда и только тогда является гетерологическим, когда оно нематематическое; «абстрактное» тогда и только тогда является гетерологическим, когда оно неабстрактно. Точно так же: «гетерологическое» тогда и только тогда гетерологическое, когда оно негетерологично, т. е. когда является автологичным. Только в этом случае и получается парадокс типа «Лжец». Тут в самом деле из гетерологичности слова «гетерологический» вытекает его негетерологичность, а из негетерологичности — гетерологичность. Но это не так «страшно» и парадоксально, как в случае со «лжецом», ибо здесь сразу можно понять бессмысленность отнесения абстрактного понятия ко вполне чувственным словам. Вопрос о гетерологичности слова «гетерологический» или о логичности слова «логический», или о математичности слова «математический» точно так же бессмыслен, как вопросы о логичности или гетерологичности шкафа, стола или стула.

Как видим, парадокс Греллинга вовсе не семантический, а гносеологический, философский. Происходит смешение абстрактного и чувственного, общего (понятия) и единичного (знака). Опять и тут теоретики попадают в сложное положение из-за слепоты в гносеологических вопросах.

В заключение по поводу парадокса Греллинга и Нельсона следует сказать, что его авторы считали — с некоторым правом — этот парадокс разновидностью антиномии Рассела [119, с. 21]. Но Френкель и Бар-Хиллел отмечают, что рассмотренная только что антиномия «оказалась существенно отличной от парадокса, относящегося к свойству быть импредикабельным (хотя и удивительно сходной с ним)» [119, с. 21]. В чем состоит различие, авторы не разъясняют, и переводчик Ю. А. Гастев пишет в примечании: «Это... «существенное отличие» состоит в том, что парадокс Рассела относится к *понятиям*, а парадокс Греллинга — к *именам* понятий, то есть к словам» [119, с. 21]. Как видно из предыдущего анализа, это не так или, во всяком случае, не совсем так, о чем, впрочем, пишет и Гастев несколько ранее [119, с. 16], когда отмечает нечеткость деления парадоксов на логические и семантические, идущего по традиции от Рамсея [212, с. 48—49; 49, с. 47]. С. Петров справедливо отмечает, что все критикуют эту классификацию Рамсея, но не перестают ее употреблять [86, с. 67].

Из анализа парадоксов теории множеств видно, что деление их на логические и семантические не имеет большого основания. В самом деле, «логические» парадоксы имеют явно обозначенную философскую, а не только «чисто логическую» природу, сущность. «Семантические» же парадоксы — это вовсе не только «эвристические», как отмечал Рамсей, но и логические, так как в них ничуть не менее, чем в «логических», затрагиваются вопросы соблюдения законов формальной логики. Да и вообще очевидно, что не могут быть парадоксы нелогическими. Если такая странная классификация существует, то это остатки логицистского взгляда на возможность сведéния математики к логике, как справедливо отмечает С. Петров [86, с. 67—68]. Но ясно, что каждый парадокс можно и нужно рассматривать как с точки зрения законов формальной логики, так и с точки зрения диалектики.

Таковы те парадоксы, которые были открыты в начале века. Вслед за их открытием появились попытки устранить эти антиномии. Предлагались самые разнообразные способы. Одним из самых популярных был способ аксиоматизации теории множеств, поскольку аксиоматизация была испытанным методом в математике. Но именно в процессе аксиоматизации всплыла еще одна, *шестая, антиномия,* которая носит имя Сколема. Она была открыта им в 1922 г. [232, с. 217—232; 49, с. 123—139]. Заключается она в следующем. На основе некоторых теорем теории множеств и следствий из них получается, что аксиоматическая теория множеств остается истинной и тогда, когда будет предполагаться (иметься) для ее интерпретации только счетная совокупность множеств. В то же время аксиоматическая теория множеств включает теорему Кантора, которая (на основе аксиомы бесконечности) приводит нас к *несчетным* бесконечным множествам [49, с. 376—377; 119, с. 136]. Опять из наличия трансфинитного вытекает противоречие. Потому-то, как свидетельствуют Френкель и Бар-Хиллел, парадокс Сколема интуиционистами был встречен «с удовлетворением, как еще один довод против предположения о существовании множеств трансфинитной мощности» [119, с. 136].

В связи с этим парадоксом математики должны были ввести в аксиоматическую теорию множеств определенного рода релятивизм. Поскольку получается, что бесконечные множества, несчетные в одной системе, оказываются счетными в другой, то это можно объяснить следующим. В одной системе для пересчета данного множества нет множества, с помощью которого можно было бы его пересчитать, а в другой системе имеется такое «пересчитывающее» множество соответствующих пар для определения взаимно однозначного соответствия [49, с. 377; 119, с. 138]. Следовательно, понятия «счетное» и «несчетное» относительные. Для определения счетности данного множества может оказаться недостаточно средств, операций, предоставляемых данной аксиоматической теорией множеств, и нужно выходить за ее пределы, используя всю «структуру систем аксиом в целом» [49, с. 378]. Это — выдвинутая Сколемом релятивизация мощностей бесконечных множеств.

Отсюда получается, что нет никакой абсолютной несчетности. Кроме того, как показал Дж. фон Нейман [201, с. 239—240], релятивизм относится также и к свойствам конечности и упорядоченности. Из такого «двойного релятивизма» вытекает, что не только между счетным и несчетным, но и между конечным и бесконечным нет четкого и резкого перехода. Значит, и «абсолютная первоначальная интуиция целого числа», которую предполагали, исчезает. «Этот двойной релятивизм не устраняет позиций ни одной из существующих философий математики»,— отмечают Френкель и Бар-Хиллел [119, с. 139]. «Все остается смутным и относительным»,— заключают они [119, с. 139].

С. К. Клини видит больше и отмечает, что релятивизация мощностей вытекает из ситуации, аналогичной той, которую создала теорема Гёделя о неполноте и невыводимости [49, с. 378]. Это, конечно, верно, так как и там, и в парадоксе (или теореме) Сколема речь идет о соотношении как внутри отдельной системы, так и об их «внешних» отношениях, из которых они не могут быть выключены. Речь идет все о той же невозможности какой-то абсолютно замкнутой системы положений внутри теории, внутри науки в целом. Ничего страшного в этом нет. Налицо проявление диалектики науки, теории как «открытой системы», проявление невозможности абсолютной законченности и замкнутости любых теоретических систем. Однако, несмотря на существование уже упомянутой теоремы Гёделя и понимание (у Клини по крайней мере) аналогичности ей теоремы-парадокса Сколема, тот же Клини в качестве альтернатив предлагает или отказ от абсолютной несчетности, или признание априорности (!) понятия несчетности множества и произвольного подмножества. «...Или мы должны признать,— пишет Клини,— что понятия произвольного подмножества данного множества и несчетного множества являются априорными понятиями, которые ускользают от всякого описания посредством конечной или счетно-бесконечной системы элементарных аксиом. Или же... мы можем принять теоретико-множественные понятия, в частности понятие несчетности в качестве относительных» [49, с. 378].

Так явочным порядком все больше и больше, чаще и чаще обнаруживающаяся в математике диалектика заставляет математиков решать такие дилеммы. Нужды науки, необходимость в конкретной методологии решения сложных, «парадоксальных» вопросов заставляют их принимать диалектику в каждом данном случае, если не в целом и не в общем: именно диалектику, а не метафизику и идеализм, которые уже не раз демонстрировали свою бесплодность. Так, Клини объясняет, почему он склонен принять не априорность, а относительность понятий теорем теории множеств, тем, что во втором случае мы остаемся на такой позиции, где придерживаются понятий, «которые можно описать посредством элементарных аксиом», а это «можно считать весьма желательным» [49, с. 378], так как они все-таки как-то помогают справиться с теоретико-множественными парадоксами, которые совсем уж нетерпимы! В признании же относительности понятий диалектическая их противоречивость не видна и потому приемлема для математиков, привыкших возводить в абсолют принцип непротиворечивости как вечный, высший и непогрешимый.

Глава II

ПЕРВЫЕ ПОПЫТКИ РАЗРЕШИТЬ ПАРАДОКСЫ

О кризисном состоянии науки можно говорить тогда, когда в ней создается такое положение, что прежние понятия, теории, методы испытывают «крутую ломку»,— по выражению В. И. Ленина [см. 6, с. 267, а также 272, 323], и эта ломка требует коренного пересмотра логических и философских основ данной науки.

В начале века, сразу же после открытия парадоксов, хотя речь еще не шла прямо о кризисе математики, но он уже вполне обозначился. Прямо о нем начали говорить в 20-х годах, когда стало ясно, что ни одно из направлений в обосновании математики не может дать полного «избавления» от противоречий. Теперь, через десятки лет, математики признают, что третий кризис оснований их науки проявился уже в начале века [49, с. 7].

Первоначально появилось очень много разнообразных попыток избежать парадоксов. В итоге же все они вылились в три основные направления в обосновании математики, ибо речь шла именно об этом. Направления эти теперь широко известны: логицизм, формализм и интуиционизм. О них имеется обширная литература (см. только на русском языке [49, 119, 89, 48, 28, 100]), и в наши намерения не входит излагать сущность этих течений. Они будут рассмотрены здесь только с точки зрения их отношения к бесконечности.

Приступая к анализу вопроса о кризисе в своей науке, математики исходили из определенных философских позиций, осознанно или неосознанно. Как увидим в дальнейшем, большинство из них руководствовалось в основном идеализмом и к тому же отрицало возможность противоречий в науке в каком бы то ни было виде. Объясняется это тем, что образование во всех странах мира до 1917 г. осуществлялось на идеалистической основе. Философская литература, доступная математикам, была тоже в основе своей антидиалектической и идеалистической. К началу XX в. философские вопросы естествознания и математики раскрывались в работах представителей махизма и неокантианства. Махисты о философских проблемах математики не рассуждали, как известно, а направляли свое внимание на физику. По философским вопросам математики много писали неокантианцы, и у них были определенные концепции по проблеме бесконечности и ее парадоксов, которые следует здесь изложить, поскольку они могли как-то влиять на математиков. О философских проблемах математики писал также Гуссерль, который сам был математиком в начале своего пути.

Если бы философы-материалисты прилагали заметные усилия к исследованию причин парадоксов теории множеств, то они могли бы оказать определенное влияние на математиков. Но этого не было. Книга В. И. Ленина «Материализм и эмпириокритицизм» была направлена против идеализма, но, во-первых, она не затрагивала прямо философских вопросов, связанных с парадоксами теории множеств, а во-вторых, она была почти недоступна математикам.

Таким образом, влияние идеализма в начале нашего века оставалось достаточно сильным. Марксистская критика различных попыток обоснования теории множеств появилась только в 20—30-х годах.

НЕОКАНТИАНЦЫ И ГУССЕРЛЬ

Неокантианство появилось в прошлом веке, по словам Ф. Энгельса, как «выродившееся потомство классической немецкой философии» [3, с. 291]. Оно прошло некоторую эволюцию и в 70-х годах прошлого века разделилось на два главных направления: Марбургскую и Баденскую школы. Представители Марбургской школы много занимались философскими проблемами математики. Их работы издавались в достаточном количестве и оказывали некоторое влияние на умы математиков. О распространении этой философии в начале нашего века свидетельствует, в частности, то, что некоторые ревизионисты стремились «оплодотворить» марксизм неокантианством. В. И. Ленин критиковал это стремление еще в 1899 г., показывая, что такое «оплодотворение» было бы полным отступничеством от диалектического материализма [8, с. 74]. В 1908 г. в статье «Марксизм и ревизионизм» В. И. Ленин писал о том, что ревизионисты шли «в хвосте буржуазной профессорской «науки»» [7, с. 19] и тащились за неокантианцами. Особенно подробной критике В. И. Ленин подверг реакционную сущность, агностицизм и непоследовательность неокантианства в работе «Материализм и эмпириокритицизм» [6, с. 211, 216, 224, 300, 322, 323, 384]. Но, несмотря на то что даже содержание науки толкало математиков и физиков к диалектике и материализму, они, к сожалению, не воспринимали их, так как вокруг материализма шел отпугивающий «вой» его противников-идеалистов, а по поводу диалектики они, как писал В. И. Ленин, «презрительно пожимали плечами» [см. 6, с. 300; 7, с. 19]. В результате ученые часто поддавались влиянию идеализма, в том числе неокантианского.

Наиболее видными представителями Марбургской школы, затрагивавшими философские вопросы математики, являются Г. Коген (1842—1918), П. Наторп (1854—1924) и Э. Кассирер (1874—1945). Многие идеалистические идеи об априорности математических понятий, об интуиции, принимаемой как что-то мистическое и иррациональное, идут, возможно, именно от этих авторов.

У Г. Когена есть специальная работа, посвященная исчислению бесконечно малых,— «Принцип инфинитезимального метода», изданная в Берлине в 1883 г. Бесконечное и конечное, их соотношение оказываются здесь неоднократно предметом рассуждений [148, с. 31—32, 39]. Автор рассматривает понятие бесконечно малой с философской точки зрения, в частности в плане соотношения в ее содержании наблюдательного и мысленного материала, созерцания и мышления. Утверждается, что понятие бесконечно малой величины, как и всякое понятие, не зависит от созерцания времени и пространства. Понятие дифференциала возникает, по мнению Когена, «тем более... внутри исследований, которые ведут к расширению понятия *числа,* в связи с *проблемой касательной*» [148, с. 21]. Важным «мотивом» для возникновения понятия дифференциала, правда, признается механика, но тоже не в плане эмпирической обусловленности, а скорее в плане необходимости в понятийном аппарате. Так как тут Коген наталкивается на вопрос о возможности эмпирического происхождения числа, то он спешит обнаружить свое отношение к этому вопросу: «*Эмпирическое* объяснение возникновения числа является ни само собой разумеющимся, ни достаточным по-серьезному» [148, с. 21—22]. Рождение понятия числа субъективно. Возникновение его надо искать, пишет Коген, «не в так называемых вещах, а в *единстве сознания*» [148, с. 22].

Делая исторический обзор развития исчисления бесконечно малых, Коген высказывает согласие с тем, что бесконечно малая не нуль, а составная часть непрерывности [148, с. 95, 115]. В заключение он утверждает, что бесконечно малая есть «инструмент естествознания» в том прямом смысле, что она «производит и образует природные явления». Но это не внешняя, не «механически установленная часть», а «внутренне принадлежащий член, с помощью которого порождается и обеспечивается единое целое» [148, с. 133]. Соотношение конечного и бесконечно малого заключается в том, что конечное основано на бесконечно малом, как на своем элементе, который «научно объективирует и определяет» конечное, обосновывает его происхождение. «Конечное основано на бесконечно малом как на своем естественном элементе и *начале,* поскольку оно (конечное.—*И. Б.*) может быть научно им объективировано и оправдано»,— пишет Коген [148, с. 133]. При этом он считает, что если дифференциал проявляет свою реальность как конституирующее мысленное условие, то «реальность интеграла обозначается как предмет» [148, с. 144]. Не надо забывать, что для Когена «непосредственным представителем реальности» является «элемент сознания» [148, с. 148]. В «Логике» Коген называет дифференциальное исчисление даже «триумфом чистого мышления» [147, с. 30]. Так бесконечно малое сублимировано в чистое сознание, где его обосновывать как будто и не нужно.

В других работах Когена, как и в выше рассмотренных, часто встречается важная для математики XX в. мысль о соотношении логики и математики, об их близости, о том, что это соотношение рассматривалось еще Платоном [147, с. 19]. Можно у него встретить и материал по истории понятия и проблемы бесконечности [147, с. 29]. Коген считает, что если логика является логикой науки, логикой «математического естествознания», то «она должна быть преимущественно логикой принципа инфинитезимального исчисления» [147, с. 31]. Если это не так —

она устарела, так как со времени Галилея, Ньютона и Лейбница проявляет свою действенность новое мышление. Положение это справедливо, ибо введение бесконечного в исчисление бесконечно малых действительно требовало новой логики. Коген говорит о том, что логика должна стать «логикой первоначала» [147, с. 33], и все «чистое познание» должно строиться на принципе этого начала, как на своем фундаменте. Проблема первоначала, принципа не должна быть побочной и теряться среди других проблем, а должна стать основной, пронизывающей всю теорию познания [147, с. 34]. Однако при этом Коген считает мнение, что законы природы должны быть законами логики, иллюзией. По его мнению, логика имеет априорные, изначальные законы, иначе невозможно было бы идти от нее к естественнонаучному исследованию [147, с. 36].

Происхождение понятия бесконечно малого объясняется изначальной континуальностью сознания. Коген подчеркивает, что континуальность как основа мышления очень плодотворна в математике. Именно непрерывность мысли, а не пространства-времени, является основой, создающей «фундаментальное определение мышления» [148, с. 37]. Этот принцип — один из основных в той новой «логике отношений», которую кантианцы пытались ввести вместо отрицаемой ими аристотелевой логики [26, с. 93—101].

Необходимость новой логики была настоятельной. Но сугубо идеалистические принципы той логики, которую предлагали неокантианцы, делали ее непригодной для науки. Например, Кассирер пишет, что ни в коем случае не следует понимать «отношение» в их новой логике как отношение вещей, а только как «чистое отношение положений» [143, с. 438]. Именно эти абстрактные положения могут, по его мнению, «обосновать» априорность математических суждений и их своеобразную, специфичную «очевидность» [143, с. 438]. В разрешении парадоксов теории множеств неокантианская логика прямого участия не принимала. Можно говорить лишь об очень косвенном ее влиянии на обоснование теории множеств: через критику неокантианцами интуиционизма.

Та «континуальность», о которой много написано у Когена, обеспечивает связь элементов со своим первоначалом, своим происхождением, а также с противоречием.

Эта связь доказывается с помощью рассуждений идеалистического и схоластического характера. Но противоречие не признается необходимым в мышлении. Связь континуальности с противоречием объясняется только их различием [147, с. 86, 98—99]. Хотя по принципу первоначала, примененному к математике, получается, что бесконечно малое есть основание для конечного [147, с. 105], но это не наталкивает Когена на мысль, что принцип происхождения, начала приводит необходимо к принципу противоречия. Нет, он уходит в сторону, минуя диалектику. Это и естественно, поскольку исходный момент был идеалистическим: в основе знания лежит *суждение* происхождения, а «не чувственность и созерцание» [147, с. 107]. Более того, *«освобождение от чувственного есть* предпосылка для реальности бесконечно малого»,— утверждает Коген [147, с. 108]. Но тем самым и конечное сводится к чему-то чисто идеальному. Коген так и пишет: «...*Конечное должно иметь свое начало в нечувственном*» [147, с. 114]. Различные порядки бесконечно малых выводятся также «из всеобщего характера чистого мышления» [147, с. 118]. Тут есть некоторые намеки на диалектические противоречия, когда рассматривается категория сохранения в связи с бесконечно малыми. Оказывается, из наличия различных порядков бесконечно малых вытекает противоречие единства и отделения, обособления. Подобных намеков у Когена довольно много [147, с. 473, 477]. Но все они повисают в воздухе, вернее — в «духе» [147, с. 118—119], незаконченные и неопределенные. Недаром говорил П. Наторп, ученик Когена, что хотя кое-что из учения Гегеля было взято Маргбургской школой неокантианцев, но в целом его система и метод для них неприемлемы [79, с. 120—121].

П. Наторп дает понимание бесконечности, которое отличается некоторыми интересными моментами. Он сознает значение актуальной бесконечности и дает определение ее. «...Возможно при некоторых условиях считать выражение, которое включает бесконечность, например, систематически образованный сходящийся ряд, как определенный таким же образом, как конечное численное выражение» [199, с. 35]. Интересна мысль и о том, что бесконечно малая величина как «интенсивная», как «качественное понятие величины» [199, с. 43] представляет собой уничтожение чисто экстенсивного (т. е. лишь количественно различенного) понятия величины [199, с. 23—24] и закрепляется «в чистом выражении закона» [199, с. 43]. Имеется в виду тот закон, по которому изменяются значения бесконечно малой величины. Производная же есть результат непрерывного изменения, совершенного по данному закону.

Хотя тут участвует непременное логическое «начало», выражением которого будто бы является закон изменения, и другие идеалистические аксессуары, но можно видеть нечто положительное, рациональное в этих рассуждениях. Оно заключается в том, что здесь существует намек, хотя и туманный, на то, что 0/0 не есть нечто бессодержательное, а — результат изменения, отрицания, совершающегося по определеному закону.

В предисловии к одной из своих работ Наторп специально отмечает, что он признает понятие актуальной бесконечности и его применение к проблеме не только иррационального числа (что уже сделал Кантор), но и к бесконечно малым величинам [200, с. VI]. Конечно, он с явным сочувствием пишет о Веронезе, который признавал актуальность бесконечно малой величины [200, с. 170—172]. Наторп также понимает и всячески приветствует идею о бесконечном числе порядков бесконечно малых и бесконечно больших величин. Но он пишет, что «строго бесконечно малые» равны нулю и их отношение вообще не имеет никакого численного значения [200, с. 216], как будто никакого различия между бесконечно малыми нет, поскольку они не представляют никакого количества. О том, что бесконечно малая есть нуль, а вовсе не какая-то определенная величина, он пишет в нескольких местах [200, с. 170—171, 216, 220]. При этом он и подчеркивает, что изменение бесконечно малой — это «не голое количественное изменение данных конечных отношений значений, а нечто качественно другое», и частное в дифференциальном исчислении — это только «воспоминание о пути производной» [200, с. 216]. Тем самым как бы обнаруживается мысль о диалектическом отрицании. Но этот рациональный момент не выражен с достаточной четкостью.

Математики совсем не были подготовлены к восприятию столь тонкой диалектики, да еще в такой сложной форме. Вследствие всего этого диалектическая мысль, которая, возможно, появилась под влиянием Гегеля (и уже содержалась в «Математических рукописях» К. Маркса), не была воспринята математиками и через работы Наторпа.

До выхода в свет в 1910 г. книги Наторпа «Логические основы точных наук» теория множеств Кантора была известна уже вместе с большинством ее парадоксов, так что Наторп не мог не высказаться относительно нее. Он справедливо отмечает, что Кантор достиг столь больших результатов, в частности, потому, что выступал не только как математик и логик, но и как «метафизик», т. е. рассматривал вопросы с философской широтой [200, с. 165]. Он излагает позитивно учение о трансфинитном, указывает на связь трансфинитного с иррациональными числами, рассуждает о соотношении конечного и бесконечного в связи с отрицанием у Кантора аксиомы Архимеда, добавляя некоторый материал из Веронезе [200, с. 170—171]. Упоминая о парадоксах, он ссылается на общее и наивное замечание Кантора о том, что противоречия происходят только от того, что свойства конечного переносят на бесконечное [200, с. 196—197]. Говоря о Гильберте и Расселе, он критикует их понимание соотношения логики и математики [200, с. 3, 4—7]. Когда же Наторпу приходится касаться проблемы соотношения актуальной и потенциальной бесконечностей [200, с. 278], он высказывает некоторые диалектические мысли. Он пишет, что актуальная бесконечность есть единство, но противоречивое, так как оно означает завершение незавершаемого. Но, понимая диалектическую противоречивость актуальной бесконечности, единства завершенности и процесса в ней, Наторп не настаивает на этой диалектике, что не способствовало ее пропаганде среди ученых.

Э. Кассирер — более поздний представитель Марбургской школы неокантианцев — имеет значительное количество работ по философским вопросам математики. Проблема бесконечности рассмотрена им даже в историческом плане, с некоторой последовательностью [142]. В работе «Понятие субстанции и функции» Кассирер анализирует соотношение понятия числа и воображения. Он считает, что в понятии числа нет элемента воображения, представления, что они отличаются от «психологического понятия представления» [144, с. 42]. «Характеризующие основные отношения, которые господствуют в числовом ряду, немыслимы как свойства содержания данного представления» [144, с. 43]. Тем более это относится к понятию бесконечности, так как представление может быть только представлением какого-то конечного множества, которое реализуется в индивидуальном сознании как «обособленный элемент» [144, с. 43]. Бесконечность, следовательно, есть совершенно «чистое понятие», не связанное с представлением. Понятие всеобщности получают не от «пробегания» всех отдельных случаев, а из осознания определенного правила, которое просматривается сквозь все различия и особенности их проявления. Правило это устанавливается как понятийная «идентичность», и образуется понятие. Верно, конечно, что для образования понятия «число» не нужно «пробегать» в воображении *все* числа. Это невозможно в первую очередь в понятии «бесконечность», которое тем не менее существует. Однако неверно, что в процессе образования понятия не участвует представление, так как «экстраполяция», абстрагирование от некоторых чувственных элементов совершается со значительной долей воображения, в котором как раз и присутствует представление. Отрывая понятия от представлений, мы не получаем преимуществ для понимания происхождения понятий, ибо отходим от действительного процесса. Такой отрыв удобен лишь для «обоснования» положений об априорности понятий и об отсутствии связи между сущностью и явлением, что и требуется неокантианцам. «Акт счета,— пишет Кассирер,— дает нам не отношение вещей в себе, а только способ, каким они отражаются в восприятии через наше Я» [144, с. 41]. Бесконечность при этом, конечно, можно трактовать очень субъективно, считая ее, по крайней мере частично, произведением нашего собственного духа. Подобную трактовку мы и встречаем у Кассирера, когда он рассматривает канторово учение о трансфинитных числах.

Казалось бы, «метафизическая проблема актуально бесконечного» [144, с. 83] должна стать особо острой в связи с трансфинитными числами. Однако получается наоборот, эта проблема «отходит на задний план», так как при образовании трансфинитных чисел речь идет не о «бесконечном числе», а о «числах чего-то бесконечного» [144, с. 83]. По мнению Кассирера, дело облегчается, поскольку всплывает несколько бесконечностей, о выделении и различении признаков которых здесь и идет речь. Объясняет он это так. Против актуальной бесконечности выставляют обычно два типа возражений, вытекающих, как он справедливо считает, из «связывания понятий «бесконечность» и «действительность». Во-первых, непонятным оказывается, как возможна неограниченная область предметов, «на которую направлен акт счета» [144, с. 83]. К тому же сам счет так происходит, что «сосчитанное всегда должно мыслиться в определенных границах» [144, с. 84], ибо это только и допускается нашим способом счета путем перехода от одного к другому. Во-вторых, непонятно в психологическом плане, как может «конечный рассудок» пробежать и последовательно сложить неограниченно большое число единиц [144, с. 84]. Но такое противопоставление нашего духа и «предметов», из которого вытекают эти трудности, ликвидируется с помощью сублимации в область идеального.

В области трансфинитного материя заключается Кассирером в кавычки, и вся область трансфинитного оказывается чисто идеальной, логической областью. «Материя» чисел находится здесь в неограниченном [нашем.— *И. Б.*] распоряжении, так как она сама имеет не эмпирическую, а логически-понятийную природу»,— пишет Кассирер [144, с. 84]. Область трансфинитного — это «не высказывания о вещах, а суждения о *числах и числовых понятиях,* которые обобщены: так что вещество, которое как-то предполагалось, само мыслится не как внешнее данное, а как возникающее в свободной конструкции» [144, с. 84]. Никакие суммируемые «изолированные акты представления» здесь будто бы не требуются. Происходит раздувание идеального, его значения, что дает возможность Кассиреру сделать вывод о том, что трансфинитное совершенно независимо от процесса счета [144, с. 84].

Он справедливо утверждает, что понятие иррационального числа не может быть представлено через процесс почленного перечисления. Трансфинитные числа сделали признание этого фундаментального различия между процессом счета и понятием числа всеобщим. Правильно и то, что Кассирер не связывал способ обоснования трансфинитного с однообразным процессом попеременного утверждения и отрицания единицы [144, с. 84]. Неверно только то, что вся эта область понятий *никаким* образом не связана, хотя бы генетически, и в конечном счете с простым процессом перечисления объективных, материальных вещей. Однако вопрос о том, «как возможна бесконечность вообще», снимается идеализмом Кассирера, поскольку он привел все к общему знаменателю идей, мышления, превратив его в область господства «свободных конструкций», где никаких противоречий и не может быть, поскольку здесь все возможно и нет никаких запретов. Впрочем, это так, если не считаться с логическими законами!

Даже в простом ряду натуральных чисел недостаточно одного только процесса перечисления членов: и там необходимо найти закон отношения. Это верно. Но имеет ли этот закон объективную природу и можем ли мы абсолютно противопоставлять область очень высоких абстракций, которыми являются трансфинитные числа, области конечных чисел? На этот вопрос Кассирер, очевидно, отвечает положительно, поскольку он совершает это неправомерное противопоставление. Правда, потом он устанавливает между областями, разделенными такой глубокой пропастью, «понятийную континуальность» [144, с. 87]. Последняя определяется тем и заключается в том, что законы общих областей аналогичны: они подчиняются определенному закону счетной связи, хотя и «не во всех пунктах согласуются» [144, с. 87]. Но эта связь установлена абстрактно как чисто математическая, а в философском, методологическом плане Кассирер все-таки разделил эти два рода чисел.

Рассматривая направление и цель «образования понятий» в математике, Кассирер выделяет два рода, или две ступени. Во-первых, математические понятия образуются для анализа «определенной *связи отношений* в элементарных типах отношений». Во-вторых, математические понятия осуществляют «синтез этих простых типов и законов образования *отношений высшего порядка*» [144, с. 99]. Анализ бесконечного Кассирер относит к выражению этого второго направления. Но по сути дела он не дает никакого методологического или гносеологического анализа этой проблемы. К тому же та идеалистическая позиция, на которой он стоит, в принципе лишает его возможности даже правильно поставить вопрос о сущности бесконечного и о логике и методологии его исследования. Какая речь может идти о правильной постановке вопроса, если даже пространственную непрерывность и бесконечность Кассирер производит из духа, а не из объективной реальности! «...И дальнейшие моменты геометрического пространства, также его *непрерывность* и *бесконечность* покоятся на таком же основании: они никоим образом не *даны* уже в пространственном ощущении, а покоятся на идеальных дополнениях, которые мы к ним привязываем» [144, с. 139],— пишет Кассирер. Точно так же и переход от области рациональных чисел к области иррациональных, по Кассиреру, осуществляется путем ряда «мысленных шагов» [144, с. 139], и все это происходит в «бесконечном, гомогенном и непрерывном понятийном пространстве геометрии» [144, с. 140].

В связи с анализом кризиса в математике Кассирер выдвигает свой способ обоснования теории множеств, который считает достаточным для спасения от парадоксов. Позиция его характеризуется некоторым концептуализмом, заключающимся в первую очередь в утверждении, что для любого множества или ряда должен быть установлен общий принцип, закон его построения. Озабоченный проблемой ликвидации противоположности общего и единичного [143, с. 428], «посюстороннего» и «потустороннего», Кассирер не видит того, что составляет суть парадоксов. Он считает, что достаточно его концептуалистского понимания соотношения «закона» и числа, символа и «внешнего объекта», чтобы дать некий средний путь между формализмом, интуиционизмом и логицизмом, устраняющий недостатки этих течений. На самом же деле Кассирер склоняется здесь более всего к интуиционизму и со своим принципом конструирования вынужден отбрасывать те уже существующие области математики, к которым не может быть применен этот принцип. Позиция эта имеет своих сторонников и в настоящее время, но она не раскрывает сущности парадоксов и не дает плодотворного пути к их разрешению [119, с. 407—408], а потому большинство математиков ее не принимает, как не принимают и интуиционизм.

Философские проблемы математики значительное место занимали также в феноменологической философии Э. Гуссерля (1859—1938). Основные идеи и категории его философской системы мы узнаем в работах некоторых современных математиков. Существующие только в мысли «идеальные» и «реальные» предметы, трактовка интуиции как единственного пути познания сущности и другие идеалистические положения знакомы нам по работам Брауэра и Гильберта. Влияние Гуссерля на математиков объяснялось тем, что он включал в свое рассмотрение философские проблемы и этой науки. Так, например, еще в 1891 г. он написал большую работу «Философия арифметики», где в числе прочих вопросов анализировал и проблему бесконечности. Он использовал для обоснования числа понятие множества. Но и это понятие, и понятие числа имеют у Гуссерля в конечном счете субъективно-идеалистическое происхождение [187, с. 91—94 и др.]. В этой работе Гуссерль выступал против актуальной бесконечности на том простом, тривиальном для идеалистов прежних времен основании, что разум наш конечен, ограничен. Только обладая бесконечным разумом, можно было бы постичь актуальную бесконечность. «Только бесконечный рассудок могли бы мы считать способным к настоящему представлению *всех* чисел, так как в нем находилась бы в конце концов способность объединить истинную бесконечность элементов в эксплицитное представление» [187, с. 191—192]. Вся арифметика отсюда является, по Гуссерлю, суммой искусственных средств для преодоления «несовершенства нашего интеллекта» [187, с. 192]. В простейшей форме этот довод мы встречаем еще у Гассенди, Гоббса и других философов того времени [27, с. 626; 32, с. 204]. О несостоятельности такого довода говорил уже Кантор, хотя и несколько наивно [139, с. 176—177].

Против метафизичности идеи о возможности нашего разума познавать только конечное выступал Ф. Энгельс. Так, по поводу положения К. В. Негели: «Мы можем познавать *только конечное*» — он замечает: «Это постольку совершенно верно, поскольку в сферу нашего познания попадают лишь конечные предметы. Но это положение нуждается вместе с тем в дополнении: «по существу мы можем познавать *только бесконечное*»». И в самом деле, всякое действительное, исчерпывающее познание заключается лишь в том, что мы в мыслях поднимаем единичное из единичности в особенность, а из этой последней во всеобщность; заключается в том, что мы находим и констатируем бесконечное в конечном, вечное — в преходящем. Но форма всеобщности есть форма внутренней завершенности и тем самым бесконечности; она есть соединение многих конечных вещей в бесконечное» [2а, с. 548—549].

Но для Гуссерля понятие бесконечности отнюдь не является отражением внешних свойств. Раз человек не может актуально перечислить бесконечный ряд, значит понятие бесконечности не имеет смысла для него. «Как можно говорить о понятии, которого собственно нет?» — восклицает он [187, с. 192]. Сам же он при этом удивляется, как это точная арифметика основана на таком «несуществующем» понятии. Казалось бы, тут можно подойти к мысли о том, что практическое применение арифметики с понятием бесконечности доказывает, хотя и косвенно, объективное содержание понятия бесконечности. Однако Гуссерль в принципе неспособен повернуть в эту сторону. Он выходит из положения с помощью признания того, что понятия нам даны не только в собственном, но и в «символическом» виде [187, с. 192]. Затем он рассматривает в специальной главе «Символические представления множественности» понятие бесконечности в мистическом, «символическом» виде, развивая положение об этом своего учителя Ф. Брентано (1838—1917). Бегство в символы спасает от анализа содержания понятия бесконечности. Несколько ниже Гуссерль излагает свое понимание происхождения понятия бесконечности. Он пишет, что бесконечность имеет характер мнимого понятия, так как оно есть следствие мысленного продолжения бесконечного процесса до его воображаемого конца. Противоречивость и нелепость этого понятия являются явными, по мнению Гуссерля, и логически оно недопустимо [187, с. 218—221]. Неоспоримым здесь является только неограниченный процесс. Иного Гуссерль не допускает в содержании понятия бесконечности.

Далее должна идти речь о числе, фундаментом для которого является представление о множестве. Но представление-то ведь символическое! Таким же оказывается и представление числа. «Символическое представление множества,— пишет Гуссерль,— образует фундамент для символического представления числа» [187, с. 222]. Но зато и числа можно продолжать сколь угодно далеко, поскольку в области символов больше возможностей для воображения. По прежнему образцу и здесь устанавливается «идеальная бесконечность царства чисел», и мы в состоянии это сделать на любой ступени числового ряда. Но Гуссерль считает, что «отдаленное символизирование», которое порождает «шаткую всеобщность», не может быть нам полезным для вычислений и счета. Для этой цели употребляются «богатые содержанием символические понятия», которые хотя и отличаются резко от истинного понятия числа «в себе», недоступного нам, но являются вполне достаточными для того, чтобы представлять эти истинные понятия [187, с. 223]. Разъяснений не следует... В таком духе Гуссерль излагает на многих десятках страниц сущность числа и способы его образования. В целом Гуссерль отказывает актуальной бесконечности в праве гражданства и отводит ей место для существования только в туманной области бессодержательных символов. Правда, издатель его сочинений Л. Элей сообщает, что в рукописи второго тома «Философии арифметики» Гуссерль намеревался использовать гипотезу актуальной бесконечности для обоснования всеобщей арифметики и мыслил это как необходимое [187, с. XX]. Но второй том не вышел в свет.

Под влиянием настоятельной потребности обосновать математику, с которой Гуссерль наталкивается на проблемы, не поддающиеся простому решению с помощью существующей логики, он решил ее пересмотреть. В 1900 г. появилась его работа «Логические исследования», в предисловии к первой части которой он пишет: «...Логика нашего времени не доросла до современной науки, которую она все же призвана разъяснять» [36, с. V]. Для создания логики научного знания Гуссерль считал необходимым сначала глубоко обосновать все ее законы и категории. С этой целью была создана целая система «чистой теории познания», его знаменитая «феноменология». Он поставил важный вопрос «об отношении между субъективностью познавания и объективностью содержания познавания» [36, с. VII]. Но на путях идеализма, в значительной степени субъективного, решить этот вопрос Гуссерль не смог.

В последние годы своей жизни Гуссерль обнаруживает понимание бесконечности как «всеобщности», и в этом смысле у него реальное бытие есть «лежащая в бесконечности идея» [185, с. 282] как данность. Можно, конечно, сказать, что здесь принимается некоторый род актуальной бесконечности. Но такое ее понимание не ведет к разрешению парадоксов теории множеств, ибо ни диалектики, ни материализма здесь нет.

Итак, неокантианцы Марбургской школы, во-первых, дали идеалистическое, извращенное представление о происхождении математических понятий. Гуссерль тоже не прояснил вопроса. Он даже добавил долю некоторого иррационализма в него. Правда, марбургцы гораздо менее склонны к мистицизму, чем представители Баденской школы, что объяснялось, возможно, именно их связью с естествознанием. Да и само возвращение к Канту обусловливалось в значительной степени тем, что он открыл две естественнонаучные гипотезы. «С тех пор как открыли, что Кант является творцом двух гениальных гипотез,— писал по этому поводу Ф. Энгельс,— без которых нынешнее теоретическое естествознание не может ступить и шага,— а именно приписывавшейся прежде Лапласу теории возникновения солнечной системы и теории замедления вращения Земли благодаря приливам,— с тех пор Кант снова оказался в должном почете у естествоиспытателей...» [2а, с. 370]. Однако эта связь с естествознанием не сделала учение неокантианцев более материалистическим, а только обусловила отсутствие в нем упрощенного иррационализма. По этому поводу русский философ-идеалист Э. Л. Радлов (1854—1928) писал в своей статье «Мистицизм в современной философии», что отсутствие творческой мысли у неокантианцев объясняется отсутствием в их философии мистицизма [см. 98, с. 37]. Так достается непоследовательным философам справа!

Во-вторых, отмечая значение теории множеств, неокантианцы и Гуссерль вместе с тем не поняли до конца глубокого значения парадоксов, обнаруженных в ней. Они считали, что парадоксы можно устранить некоторыми логическими нововведениями.

Нужно отметить, что рассмотренные философские концепции имеют в историческом плане определенные заслуги. Их представители критиковали плоский эмпиризм, индуктивизм и показали роль теории в научном исследовании. Но при этом у них обнаружился большой крен к идеализму, а к диалектике они не пришли. Математикам же эмпиризм не очень сильно угрожал, а диалектика была нужна. Таким образом, неокантианцы и Гуссерль не могли дать математикам того, что им было нужно, а лишь способствовали утверждению идеализма, к которому математики и сами были склонны из-за абстрактности своей науки. Не приходится удивляться, что основные течения, связанные с попыткой разрешить парадоксы теории множеств,— логицизм, формализм и интуиционизм — несут на себе глубокий отпечаток идеализма и страдают отсутствием понимания диалектики.

Таким образом, та философия, которая была доступна математикам, не давала научного решения вопросов, волновавших их, и потому не оказывала на них большого влияния, хотя и была официальной философией в то время. Марксистская же философия не была официальной и потому не могла пробить прямого пути к умам ученых, хотя и была очень им нужна. По поводу подобного положения в естествознании еще Ф. Энгельс писал: «...Так как и до сих пор можно по пальцам перечесть естествоиспытателей, научившихся мыслить диалектически, то этот конфликт между достигнутыми результатами и укоренившимся способом мышления вполне объясняет ту безграничную путаницу, которая господствует теперь в теоретическом естествознании и одинаково приводит в отчаяние как учителей, так и учеников, как писателей, так и читателей» [4, с. 205].

Правда, идеи диалектики и материализма к началу нашего века все-таки распространялись, закономерно рождаясь из развития науки. Но такое явление чаще встречалось в мышлении физиков, которые не были так жестко, как математики, связаны аксиоматическим построением теорий и формальными, логическими правилами. Так, например, французский физик П. Дюгем (1861—1916) высказывал мысль об относительности истины, о закономерном процессе ее уточнения. Он считал, что каждый закон физики в этом смысле «есть по существу своему закон временный,... закон относительный» [38, с. 208]. Вследствие этого даже подтвержденный «бесчисленными своими последствиями» закон всемирного тяготения «приходится беспрестанно видоизменять и дополнять, чтобы он оставался в согласии с данными опыта» [38, с. 211]. Недаром В. И. Ленин, оценивая философскую позицию П. Дюгема, говорил: «В целом ряде мест он вплотную подходит к диалектическому материализму» [6, с. 330]. Но у математиков путь к диалектическому материализму осложнялся тем, что они решали философские вопросы как бы через призму логики, будучи несколько завороженными ею, и потому действительность с ее диалектикой была от них дальше, чем от физиков. Стихийный путь к диалектической логике для них оказывается особенно сложным и долгим, изобилующим отступлениями и непоследовательностью, что демонстрируется, в частности, на примере развития логицизма, формализма и интуиционизма.

Идеи логицизма высказывались в прошлом веке такими математиками, как Г. Фреге (1848—1925), Б. Пирс (1809—1880), Э. Шредер (1841—1902), Дж. Пеано (1858—1922) и другими. Но в связи с парадоксами теории множеств логицизм был развит одним из первых Б. Расселом (1872—1970), который много сделал для популяризации этого течения. К логицизму склонялись в нашем веке также Р. Карнап, А. Уайтхед, Л. Генкин, Н. Гудмен, Л. Кутюра и другие. Некоторые из этих ученых полностью или частично перешли затем на другие позиции.

Как известно, Рассел считал, что логика и математика к началу нашего века слились, и теперь можно выводить из логики математические положения. «Логика стала математичнее, математика — логичнее»,— пишет Рассел [227, с. 196]. Соотношение во времени между математикой и логикой он выражает так: «Логика — юность математики, математика — зрелость логики» [227, с. 196]. Их родство, пишет он, бросается в глаза. Подобное утверждали и другие математики. Так, на первом Международном конгрессе математиков в 1897 г. Э. Шредер говорил: «...Математика кажется мне только *ветвью всеобщей логики*» [188, с. 149].

Но для нас важно не само по себе понимание логицистами соотношения логики и математики [108, с. 18—24], а то, как они соответственно этому пониманию определяют и применяют в своих работах понятие бесконечности.

Рассел и Уайтхед в «Principia mathematica» дают определение бесконечности по Кантору, через ее рефлексивность, т. е. через свойство бесконечного множества быть равномощным своему подмножеству, и постоянно устанавливают отношение конечного и бесконечного, рассматривая их совместно [223, с. 118, 133—143, 156—158, 170, 179]. Такое свободное употребление понятия бесконечности объясняется тем, что у авторов имелось глубокое убеждение в спасительности теории типов, которую они разработали [122, с. 360; 229, с. 237—253, 342—343]. Сущность ее заключается в том, что разные уровни абстракции помещаются в различные «типы». Создается иерархия типов из понятий различной степени обобщения. Такая теория не позволяет незаметно перевести понятие из одного типа в другой и создает существенные перегородки между понятиями. Поскольку же парадоксы теории множеств создаются, в частности, потому, что понятия переходят с одного уровня общности на другой, то теория типов действительно несколько спасает положение [224, с. 64, 161—167]. В частности, Уайтхед и Рассел устанавливают определенную иерархию типов различных слов — для парадокса Ришара и подобных, указывая при этом на исчезновение парадоксов. Порочный логический круг, пишут они, «ведущий к противоречию ...исчезает, как только типическая двусмысленность слов превращается в типическую определенность, то есть когда они определяются как принадлежащие к тому или иному типу» [224, с. 64]. Для еще большего «очищения» математики от непредикативных определений создается разветвленная теория типов, с различными порядками для всех типов, кроме нулевого [224, с. 161—167].

Однако теория логицизма не устраняет диалектических противоречий, которые заложены в парадоксах, связанных с бесконечностью. Она дает лишь некоторые принципы и методы, позволяющие обращаться с математическим материалом, искусственно устраняя хотя бы непредикативные определения. В целом можно сказать, что логицисты,— и не только в лице Рассела и Уайтхеда, но и современных авторов (например, Гудмена, Куайна, Вуджера), которые вынуждены усовершенствовать и исправлять расселовскую логицистскую систему,— в значительной степени продвинули математику вперед. Движущей силой при этом являлась и является в конечном счете диалектическая противоречивость бесконечности. К тому же логицистская позиция не мешает ее представителям принимать актуальную бесконечность и теорию множеств, которую они и рассматривали в аспекте возможности сведéния ее к логике с помощью своих методов [224, с. 2, 3]. Не отбрасывая бесконечности и принимая целиком теорию множеств Кантора, Рассел видит свою задачу только в том, чтобы изложить ее в непротиворечивой форме. Он считает, что как арифметика должна быть с помощью точного определения понятий показана в качестве «ветви чистой логики», так и всю математику следовало вывести непосредственно из логики [220, с. 114]. Но эта попытка заранее обречена на провал, так как Рассел не отрицает актуальную бесконечность. Ее анализу он посвящает целую главу. Тут он излагает полемику по вопросу о существовании актуальной бесконечности, упоминает Лейбница и Канта.

Рассел приводит то положение противников актуальной бесконечности, что если множество не имеет конечного числа элементов, то это не истинное целое [229, с. 143]. Отвечая на него, он указывает, что, например, число дробей между 0 и 1 бесконечно, и нельзя указать все эти дроби, но тем не менее мы можем говорить о *всех* членах этого множества. При этом возникает вопрос о возможности бесконечного единства, определяемого Расселом через конечное единство. Здесь он верно понимает единство конечного и бесконечного, необходимость их взаимоопределения. «Единство конечно тогда и только тогда,— пишет он,— когда совокупность его простых составных частей (т. е. не состоящих в свою очередь из частей.— *И. Б.*), является конечной. Во всех других случаях единство является бесконечным» [220, с. 145]. Развивая дальше положение о соотношении единства и частей в бесконечном, Рассел выделяет два основных случая бесконечного единства. В целом можно сказать, что в бесконечном единстве может обнаружиться составляющее единство, которое содержит в себе снова составляющее единство и так далее без конца. Но это еще не так интересно, поскольку обнаруживает лишь «дурную» бесконечность частей и целого в бесконечности. В этот скучный процесс Рассел вводит дифференциацию. Во-первых, могут быть и простые, т. е. несоставные части единства, но число их должно быть бесконечным. Во-вторых, простых частей может вообще не быть, т. е. «все составные части, без исключения, могут быть сложными» [220, с. 145]. Может быть и еще несколько более сложный случай, когда, хотя и есть простые составляющие, но они вместе со сложными единствами, составленными из них, не образуют еще всех частей первоначального, основного единства. Только единства такого рода и могут быть названы бесконечными.

Склонный к проблемам философского, гносеологического характера в математике, Рассел поднимает интересный вопрос, который обычно не встречается в работах о бесконечности. Он утверждает, что может существовать бесконечное единство как бесконечно сложное положение. «Оно не может быть анализируемо каким-либо путем конечным числом составляющих частей» [220, с. 145]. До сих пор мы охватывали конечным числом слов, понятий бесконечные классы, бесконечные предметы. Такими словами, как «всё», «все», «любой», «каждый», мы с легкостью это делаем и умещаем в одном конечном, коротком суждении утверждение о бесконечном. Однако это совсем другой вопрос, хотя то, что нам удается в конечных формах выражать бесконечное, т. е. применять с успехом метод соотнесения конечного с бесконечным, это, считает Рассел, «замечательный и счастливый факт» [220, с. 145]. Относительно же того, может ли быть такое «бесконечное единство» в области человеческого знания,— вопрос должен быть оставлен без решения, по его мнению, так как подобных явлений мы до сих пор не встречали и сказать о них ничего не можем.

Проблема возможности такого положения, анализ или доказательство которого требуют бесконечного числа суждений, интересна, но не так сложна, как это кажется Расселу. Ведь, во-первых, ему уже известны такие положения. Он только не понимает, что они именно такого рода. Их в математике сколько угодно. Вопрос о сущности иррациональных чисел или актуальной бесконечности и многие другие явно не могут быть разрешены в один определенный, конечный момент как заключение определенного конечного числа предыдущих суждений. Очевидно, Рассел не может и не хочет это замечать, поскольку сохраняет иллюзию всех математиков о возможности четкого, однозначного решения вопросов.

Во-вторых, ведь совокупность всех проблем одной или всех наук в каждый данный момент, являясь конечной, в то же время требует для своего решения бесконечного развития науки в целом, да и развития всего общества. Ф. Энгельс писал по этому поводу: «...Люди стоят перед противоречием: с одной стороны, перед ними задача — познать исчерпывающим образом систему мира в ее совокупной связи, а с другой стороны, их собственная природа, как и природа мировой системы, не позволяет им когда-либо полностью разрешить эту задачу. Но это противоречие не только лежит в природе обоих факторов, мира и людей, оно является также главным рычагом всего умственного прогресса и разрешается каждодневно и постоянно в бесконечном прогрессивном развитии человечества — совершенно так, как, например, известные математические задачи находят свое решение в бесконечном ряде или непрерывной дроби» [2, с. 36]. Это понятно хотя бы потому, что все в окружающем нас мире находится во всеобщем взаимодействии. Но Рассел имеет в виду доказательство одного конечного, частного положения. При этом он не оговаривает (так как не осознает этого), что доказательство предполагается формально-логическое. Не оговаривает и того, что некоторые парадоксы порождают процесс типа «дурной» бесконечности, поскольку не разрешаются в конечный момент времени. Ведь все диалектические противоречия порождают бесконечное движение: в природе ли, обществе ли, в мышлении ли, поскольку их разрешение таково, что создает не остановку, не исчезновение прежнего качества, а появление нового качества и нового этапа движения, изменения. Однако постановка вопроса о возможности «бесконечных доказательств» является несомненной заслугой Рассела.

Продолжая рассуждать о соотношении «бесконечного целого» и его частей, Рассел находит новые интересные моменты в этом плане. Древний вопрос о делимости получает у Рассела несколько более новое освещение. Он пишет, что в связи с бесконечностью возникает вопрос: всегда ли имеются простые части (конечные) в бесконечном? За ним — следующий: является ли наше бесконечное целое актуальной совокупностью неисчислимых простых частей? Первый вопрос Рассел разрешает следующим доказательством. Если «целая бесконечность» имеет конечное число простых частей, то их можно отбросить, как известно, и при этом останется все равно бесконечность, так как в противном случае получится конечная сумма двух конечных чисел (отброшенного и оставшегося), а не актуальная бесконечность. Но можно брать все новую и новую конечную часть от бесконечности и отбрасывать ее; и будет всегда оставаться бесконечность. Из этого следует, что «каждая часть целого или является простой, или содержит простые части» [220, с. 147], а значит, всякое бесконечное целое имеет по крайней мере одну простую часть.

Но гораздо труднее второй вопрос. Если мы разделим бесконечное целое на конечное число частей, то одна из них должна быть бесконечной. Если затем эту бесконечную часть мы разделим на конечное число частей, то снова должна остаться по крайней мере одна бесконечная часть, и т. д. «Таким образом, неконечным числом делений можно свести все части к конечности»,— пишет

Рассел [220, с. 147]. Получается бесконечный ряд частей, и он при этом не имеет никакого рода противоречий. Но метода доказательства (при актуальном делении) того, что всякое бесконечное целое должно быть совокупностью,— нет. Доводов за простые составляющие бесконечного целого не больше, справедливо отмечает Рассел, чем за первый момент времени или последнее число [220, с. 147]. Сложность и внутреннюю логическую противоречивость отношения части и целого в бесконечном Рассел понимает.

В применении к понятию величины Рассел несколько конкретизирует положение о бесконечности континуума [220, с. 188—196] и вообще о сущности бесконечного. Так, он показывает, что «конечные числа подчиняются закону математической индукции; бесконечные числа — нет» [220, с. 192]. Путем последовательного конечного числа шагов может быть достигнуто только конечное число. Наряду с этим он отмечает положение об эквивалентности собственной части множества элементов бесконечного множества целому множеству.

По поводу континуума, как и по другим вопросам, касающимся бесконечности, Рассел приводит некоторые положения совсем забытых философов или Гегеля, которого он не принимает [220, с. 338, 346]. И все же философский аспект рассмотрения Расселом бесконечности достаточно интересен. Так, он считает, что понятие континуума можно определить без порождения противоречий, привлекая аксиому непрерывности и отрицая актуальность бесконечно малых [220, с. 368]. Последние, по мнению Рассела, хотя и могут быть допущены в некоторых формах, обычно приводят к противоречивости.

Анализируя апории Зенона, Рассел приходит и тут к выводу, что континуум не обнаруживает противоречий, если не предполагать существования актуально бесконечно малых (220, с. 353—354]. По его мнению, решение парадокса Зенона об Ахиллесе и черепахе следует также из положения об эквивалентности целого и его части в бесконечности. «...Так как,— пишет Рассел,— если бы целое и часть не могли быть соотнесены элемент к элементу, то из этого прямо следовало бы, что если две материальные точки передвигаются вдоль одной и той же тропинки, одна вслед за другой, то та, которая сзади, никогда не могла бы догнать другую» [220, с. 358]. Парадокс Зенона

Рассел отождествляет с парадоксом Тристрама Шенди, который в течение двух лет описал только два дня своей жизни. Поскольку в бесконечности множество дней эквивалентно множеству часов, то Тристрам Шенди, живя бесконечное время, обязательно опишет *все* дни своей жизни [220, с. 358—359]. Таким образом, к противоречию приводит только «аксиома здравого смысла» о том, что целое неподобно части. Как видим, получается не столько философия, сколько обыкновенная, формальная логика. Именно здесь Рассел признает, что не следует принимать столь простое объяснение парадоксов как то, что «понятие всех вещей, или целый универсум сущностей и существ является некоторым образом незаконным и по природе своей противоречащим логике» [220, с. 362]. Далее Рассел показывает, что не всегда нечто всеобщее есть одновременно и самое большое. Так, отмечает он, «число всех чисел может быть меньше самого большого числа и не является противоречащим факту (если только это может быть фактом), что число индивидуумов больше, чем число чисел» [220, с. 363]. Таким способом Рассел защищает бесконечность от обвинения ее в порождении парадоксов теории множеств. Но это мало помогает, так как очевидно, что они вытекают из бесконечности, принятой за целое.

Где и что бы ни говорил Рассел о бесконечности, он всегда старается подчеркнуть, что противоречивость бесконечности только «кажущаяся». Так, говоря о неиндуктивности и рефлексивности бесконечных множеств[1], он в то же время утверждает, что в этом нет никакой противоречивости. В духе Кантора Рассел подчеркивает, что «просто» область бесконечного отличается по своим свойствам от конечной области, и противоречие существует только между тем, что мы привыкли понимать под числом, и тем, что представляет собой бесконечность. Но математики не могут с этим согласиться, так как существуют противоречия, которые не согласуются с принятой логикой. Значит, надо отрицать или логику, или бесконечность.

---

[1] Под *неиндуктивностью* бесконечных множеств понимается неприменимость к ним метода полной математической индукции. Причина этой неприменимости в том, что вычитание или прибавление к бесконечным множествам конечного — а в некоторых случаях и бесконечного — числа единиц никак не изменяют их. *Рефлексивность* бесконечных множеств выражается в эквивалентности в них части — целому.

Противоречивость проявляется и в том, что бесконечные числа не имеют непосредственного предшественника и поэтому к ним не может быть применена математическая индукция [226, с. 152—154]. Тем не менее Рассел и здесь утверждает, что это противоречит не логике, а «нашим предрассудкам и привычке ума» [226, с. 154]. Но ведь и логика в конце концов есть «умственная привычка»! И именно этой «привычке» противоречат свойства бесконечных чисел.

Итак, Рассел, как можно уже заключить, был в значительной степени последователем Кантора в вопросе о теории множеств и бесконечности. Его положения в этом часто повторяют положения, известные уже из работ Кантора. Заслугой Рассела и Уайтхеда является развитие теории типов, которая хотя и не обнаруживает осознания ее авторами диалектических противоречий в теории множеств и не указывает способа разрешения парадоксов, но создает некоторые конструктивные возможности для обращения с бесконечными множествами. Кроме того, хотя логицизм не выдержал критики временем, сама идея создания более жестких форм математических понятий, чем прежние, была плодотворной. Такое «упорядочивание» с помощью формул и строгих логических следований полезно всегда, поскольку оно часто позволяет легче сделать наблюдения и выводы, которые были затруднительны или даже невозможны при «неупорядоченном» состоянии теорий. О значении формул для развития математики недаром писал еще К. Маркс в «Математических рукописях» [1, с. 29—39, 55—57].

Однако слишком большое увлечение формулами и логикой привело математиков к тому, что стали обращаться с логикой так, как будто она является частью математики. Одни прямо признают (Рассел), что включают логику в математику, другие обращаются с логикой как с «подвластной» математике без всяких оговорок. Причина такого отношения математиков к логике заключается, во-первых, в том, что формальная логика символизирована и стала *математической* логикой; причем символика в логике не отличается от символики в математике. Во-вторых, имеет значение то, что осознали относительность формы в математике, которую можно соотнести с различным содержанием, давать различные «интерпретации». Но так как с «чистыми» формами обращаются путем «чистой» логики, то математическое содержание здесь почти ускользает от внимания. В-третьих, развитие аксиоматического построения математических теорий и возможность относительно произвольно менять системы аксиом, оставляя при этом неизменным логические правила, также толкает к логистскому пониманию соотношения математики и логики [116, с. 274]. К этому следует добавить, что подобное, осознанное и неосознанное, отношение математиков к логике объясняется, на наш взгляд, еще тем, что математики не ставят вопрос о ней в широком, философском плане. Почему логика является именно такой, а не иной, каково ее происхождение и отношение к объективным явлениям с их законами, этот вопрос в общей форме обычно не возникает. Если же он и возникает, то для его решения не привлекают философию. Это происходит по причине преувеличивания возможностей математики в разрешении общеметодологических вопросов. Появилось в литературе мнение, что якобы вопросы обоснования математики потеряли философский характер. «Отличительным свойством современных исследований по основаниям математики,— писал А. Мостовский,— является то, что они частично потеряли философский и приобрели математический характер» [75, с. 35]. Но такая тенденция не может способствовать диалектическому пониманию логики.

Заслугой логицизма и является, во-первых, как раз то, что его представители показали возможности преодоления консервативного отношения к традиционной логике. Они развили логическую теорию, выводящую старую логику за ее рамки. Тут важен был сам факт создания нового логического «механизма», поскольку это было проявлением неудовлетворенности старой логикой.

В. Б. Бирюков справедливо считает, что ограничение предметной области рассуждения, которое было продолжено Расселом с помощью теории типов вслед за Э. Шрёдером, есть стихийное проявление диалектического принципа конкретизации в логике. Кроме того, теория типов вводила некоторую аналогию принципа движения в логические исчисления. Тем самым логицизм исподволь служил утверждению «*идей диалектической логики в логико-*

математических построениях» [20, с. 26] и способствовал разрешению антиномий.

Поскольку логицизм не создал, да и не мог создать удовлетворительных методов устранения парадоксов бесконечности по причине отказа от диалектики, то к 20-м годам нашего столетия он был вытеснен формализмом и интуиционизмом [23, с. 212—215].

ФОРМАЛИЗМ

В противоположность логицизму формализм выступал против бесконечности, за что и получил название финитизма. Основатель формализма Д. Гильберт (1862—1943) до того, как стал финитистом, написал уже весьма значительное число работ, в которых прямо или косвенно затрагивал проблему бесконечности. Еще в 1899 г. в своей работе «Основания геометрии» Гильберт предпринимает попытку создать аксиоматическое изложение геометрии. При этом он сталкивается с вопросами непротиворечивости и независимости аксиом [30, с. 92—110], которые и анализирует в процессе своей дальнейшей деятельности. Отличаясь широтой мышления, Гильберт не мог остановиться на одной-двух узких проблемах. Обеспокоенный положением математики в целом, он в докладе на Международном математическом конгрессе (1900 г.) поставил перед учеными 23 проблемы, которые намечали путь дальнейших математических исследований. Нас интересуют те из них, которые относятся к вопросу бесконечности. Именно о проблеме бесконечности и говорится уже в первой поставленной Гильбертом проблеме. Она называется: «Проблема Кантора о мощности континуума» [91, с. 23—25]. Все проблемы, которые связаны со свойством непрерывности, также относились к разработке понятия бесконечности [91, с. 31—34, 43—44].

В докладе «Об обоснованиях логики и арифметики», прочитанном на III Интернациональном математическом конгрессе в Гейдельберге в 1904 г., Гильберт поставил задачу устранения теоретико-множественных парадоксов, высказывая при этом основное, принципиальное методологическое положение о решении этой проблемы. Во-первых, он отверг дедекиндово построение теории целого числа, так как в нем содержится бесконечность. «...Его метод,— писал Гильберт,— я позволю себе постольку назвать *трансцендентальным*, поскольку он доказывает существование бесконечного путем, основная идея которого используется таким образом и философами; этот путь я, однако, не могу признать удобопроходимым и надежным, так как при этом приходится пользоваться понятием совокупности всех вещей, а в этом понятии кроется неизбежное противоречие» [30, с. 324]. Как видим, и Гильберт игнорирует всякое возможное философское решение вопроса как в принципе неприемлемое для математического обсуждения, даже если вопрос носит философский, методологический характер. Но проблему бесконечности, парадоксов теории множеств решить без философского анализа просто нельзя.

Во-вторых, Гильберт считает лучшим способом обоснования понятия числа, на котором зиждется, по его мнению, вся математика, аксиоматический метод [30, с. 324]. При этом он, в противоположность логицистам, отмечает, что арифметика вовсе не является частью логики, так как при изложении логики пользуются арифметическими понятиями множества, количества и т. п. [30, с. 325]. Бесконечное с помощью предлагаемой формализации незаметно «оконечивается» и становится подобным любому другому элементу, члену аксиоматической системы. Главным же принципом аксиоматической системы объявляется непротиворечивость. Она обеспечивается «правильным» процессом оперирования с математическими символами и правильным ходом доказательства.

Таким образом, уже в этой работе высказываются наметки главных формалистических положений: во-первых, то, что бесконечность можно «разложить» или изобразить в конечном числе операций и доказательств; во-вторых, хотя и вскользь, Гильберт говорит здесь о бесконечности как о «мыслимой вещи» [30, с. 329]. «...Множество вообще определяется как мыслимая вещь...» [30, с. 333]. По его мнению, при таком методе можно доказать непротиворечивость теории множеств. «Точно так же,— пишет Гильберт о своем методе,— доказывается, что основным понятиям канторовского учения о множествах и, в частности, канторовским алефам присуще непротиворечивое существование» [30, с. 337].

Теперь, после Кантора, во всех отраслях математики прочно укоренилось понятие бесконечности, без которого нельзя обойтись. Почти в каждой работе Гильберта так или иначе затрагивается бесконечность. Однако и его «финитистская», формалистическая теория все более приобретала совершенный вид. Так, в 1918 г. Гильберт писал, что ему все больше становится ясным значение аксиоматического метода [182, с. 146]. К этому времени у него окончательно выработались два принципа аксиоматизации как основные и обязательные для всякой аксиоматической теории: независимость и непротиворечивость [182, с. 148]. В статье «Аксиоматическое мышление» он высказывал мнение, что аксиоматический метод вовсе не есть просто способ избежать противоречий. Он является также и способом делать противоречия невозможными в той области, которая аксиоматизирована [182, с. 152]. Гильберт мыслил себе не только математику, но и другие науки, в первую очередь физику, аксиоматизированными. Он считал, что аксиоматизацию самой логики можно рассматривать как венец логицизма Рассела и аксиоматизации.

Хотя Гильберта и называют финитистом, но он не совсем против бесконечности теории множеств или иррациональных чисел (выступая против Кронекера) [182, с. 160; 30, с. 350, 356]. Другое дело, *как* он понимает бесконечность. Во-первых, Гильберт старается очень четко разграничить математическое и философское решение проблемы бесконечности [182, с. 161; 30, с. 324], хотя в то же время понимает, что проблема имеет большое значение именно «из-за своего всеобщего философского характера» [182, с. 162]. Во-вторых, он основывается на опыте прошлых попыток обосновать математику, а также рассматривает попытку Цермело аксиоматизировать теорию множеств и критикует интуиционистов Брауэра и Вейля как наиболее ярких представителей этого течения. В-третьих, Гильберт исходит из того, что объектом нашего мышления являются «мыслимые вещи», обозначаемые знаками, которые «непосредственно наблюдаемы» и «ни к чему другому не сводимы» [182, с. 163]. Положение: «в начале...— *знак*» — это его «прочная философская установка», которую он считает «необходимой для обоснования чистой математики, как и вообще всего научного мышления, понимания и общения» [182, с. 163]. В-четвертых, Гильберт применяет свой принцип непротиворечивости и независимости аксиом и приступает к аксиоматизации теории множеств с целью устранения из нее противоречий. При этом он развивает теорию математического доказательства, а также способ аксиоматизации и формализации [182, с. 178—191].

Главной мыслью теории доказательства Гильберта является идея обязательной строгой формализации всего математического. «...Так что...математика в узком смысле слова,— писал он,— приходит в состояние формулы» [182, с. 179]. Добавляются сюда еще в отличие от обычных математических формул логические знаки. Развитие теории доказательства у Гильберта имеет одну главную цель: показать, что все можно формализовать и что формализованное содержание всегда можно доказать с помощью конечного числа операций. Он понимал, что сведе́ние бесконечного к конечному нужно начинать уже в самом начале, т. е. когда уже под субъектом понимаются «все» или «каждый». По мнению Гильберта, мы именно тогда открываем ворота заблуждениям, когда применяем положения, годные только для конечных областей, к бесконечным [182, с. 182]. Не принимать обычные способы заключений как сами собой разумеющиеся, а анализировать возможность их применения к бесконечности — такова заповедь Гильберта, высказанная им в процессе разработки теории доказательства. Он ввел целый ряд аксиом, с помощью которых пытался доказать непротиворечивость теории множеств [182, с. 180—183]. Однако при обращении с бесконечностью всегда возникают неожиданности. Гильберт понимал, что все философские и логические трудности порождаются именно содержанием понятия бесконечности. Об этой проблеме он говорил и на съезде математиков в Мюнстере (1925 г.), посвященном Вейерштрассу.

Отдавая должное вкладу Вейерштрасса в область обоснования бесконечно малого, Гильберт вместе с тем указывал, что эта проблема пока остается открытой. Особенно тревожит Гильберта необоснованность актуальной бесконечности, которая выступает «в бесконечных числовых последовательностях, определяющих действительное число, и затем в понятии системы действительных чисел, которая воспринимается точно так, как предстоящая перед нами готовая и законченная совокупность» [30, с. 339]. Применение в вейерштрассовской трактовке таких «форм», как «все действительные числа», является причиной логических сложностей, о которых Гильберт писал и раньше. В таких именно формах бесконечность как актуальное и проникает в математические рассуждения и формулы, хотя термина такого здесь и нет. Постоянное обращение к упомянутым скрытым формам бесконечности приводит к утверждению этого понятия в математике. Отсюда необходимость выяснить «до конца» проблему бесконечности.

В решении вопроса о бесконечности у Гильберта сразу же обнаруживается идеалистическая сторона. «Мы должны бесконечное, в смысле бесконечной совокупности, в тех случаях, где оно встречается в выводах еще и теперь,— пишет он,— понимать как нечто кажущееся, подобно тому, как в предельных процессах исчисления бесконечно малых оказалось возможным показать, что бесконечное, в смысле бесконечно малого и бесконечно большого, есть просто оборот речи» [30, с. 339]. Он предлагает заменить бесконечное конечным и затем уже иметь дело только с этими конечными процессами. Будто бы эта замена ничего не изменяет в ходе доказательства и в процессе получения формул и теорем! Свести бесконечное к конечному — вот главный принцип формализма Гильберта.

При рассмотрении проблемы бесконечности Гильберт проявляет глубоко недиалектическое отношение к миру. По Гильберту, мнение о существовании объективных противоречий в самом внешнем мире «является классическим примером бессмыслицы» [30, с. 341]. Вот в этом его, и Рассела тоже, философская слабость. Противоречия в процессе познания считаются только ошибкой, слабостью, заблуждением. Этот предрассудок в умах ученых мешает им осознать истинную сущность кризиса, порожденного диалектичностью бесконечности. Правда, под тяжестью обнаруживающихся противоречий бесконечности математики вынуждены в какой-то степени признать, что бесконечность с ее противоречиями — это вопрос не только узко логический, но и философский. Однако дальше голого признания обычно не идут. Это относится и к Гильберту. Осуждая как бессмыслицу утверждение о возможности противоречий в объективном мире, он в то же время делает вывод, что «окончательное выяснение *сущности бесконечного* выходит за пределы узких интересов специальных наук и, более того... оно стало необходимым для чести самого человеческого разума» [30, с. 341]. Придавая огромное значение проблеме бесконечности, Гильберт вполне справедливо считает, что «ни одно другое понятие не нуждается так сильно в разъяснении, как бесконечность» [30, с. 341].

Несмотря на то что Гильберт высказывается по поводу бесконечности как идеалист, когда утверждает, что она существует только в воображении, он предлагает обратиться к физике, чтобы выяснить отношение бесконечности к действительности. Во-первых, он обращается к идее атомизма. Рассматривая данные, имевшиеся в науке к 1925 г., Гильберт заключает, что есть уже достаточно доказательств невозможности бесконечного деления материи, поскольку в физике всегда находится какой-то предел для такого деления. Мы теперь на это можем ответить, что в современной науке нет доказательства невозможности бесконечного деления материи [16, с. 274—324]. Есть только иллюстрация того, что материя имеет качественно своеобразные «ступени», которые и обнаруживаются при более глубоком ее «делении». Однако Гильберт делает из данных физики вывод, что бесконечная делимость континуума существует только как воображаемая. «Бесконечная делимость континуума,— пишет он,— это операция, существующая только в человеческом представлении, это только идея, которая опровергается нашими наблюдениями над природой и опытами физики и химии» [30, с. 342]. Следовательно, по мнению Гильберта, бесконечно малое существовать не может.

Во-вторых, Гильберт пытается рассмотреть, возможно ли мыслить бесконечность как вселенную в целом. При этом он сознательно опирается не на «метафизическое умозрение», а на геометрию, наблюдение и опыт. Он справедливо вводит различение бесконечности и безграничности [30, с. 342—343]. Опираясь на теорию Эйнштейна, Гильберт делает вывод о конечности вселенной; считает доказанным несуществование и бесконечно малого и бесконечно большого.

В-третьих, он рассматривает возможность бесконечного в нашем мышлении. При этом Гильберт вспоминает все наиболее существенные понятия, связанные в математике с бесконечностью, особенно же теорию множеств, которую он всегда чрезвычайно высоко оценивает, несмотря на то что старается превратить в ней бесконечность в конечное. Он называет ее «наиболее заслуживающим цветком математического духа и вообще одним из высших достижений чисто умственной деятельности человека» [30, с. 346]. Излагая достижения теории множеств, а затем парадоксы, которые вытекают из применения в ней актуального бесконечного, трансфинитных чисел, Гильберт характеризует положение в математике после открытия парадоксов теории множеств «невыносимым». «Подумайте: в математике — этом образце достоверности и истинности — образование понятий и ход умозаключений,— пишет он,— как их всякий изучает, преподает и применяет, приводят к нелепостям. Где же искать надежность и истинность, если даже само математическое мышление дает осечку!» [30, с. 349].

Гильберт никак не хочет отбрасывать теорию множеств из-за парадоксов и пишет здесь ставшую затем знаменитой фразу: «Никто не может изгнать нас из рая, который создал нам Кантор» [30, с. 350]. Он считает возможным устранить парадоксы, выяснив «полностью» сущность бесконечности. При этом Гильберт повторяет основную философскую установку, которую мы встречаем и в более ранних его работах. Он открыто исходит из кантовского априоризма и считает, что бесконечность настолько нереальна, настолько отлична от тех вещей, о которых мы обычно рассуждаем, что для применения к ней содержательных выводов необходимы особые предпосылки. «В признании того,— пишет Гильберт,— что такие предпосылки имеются и должны приниматься во внимание, мы согласны с философами, особенно с Кантом» [30, с. 350].

В противоположность логицистам, в частности Фреге, Гильберт считает, что одной только логикой не может быть обоснована математика, которая «обладает не зависящим от всякой логики устойчивым содержанием» [30, с. 351]. Общим в этом содержании являются «определенные, внелогические, конкретные объекты, которые имеются в созерцании до всякого мышления в качестве непосредственных переживаний...» [30, с. 351]. В математике такими объектами Гильберт признает знаки. Они-то и даны «до логики»! Гильберт пишет, что знаки должны быть ясны и обозримы, т. е. конечны. Они являются априорными предпосылками, содержащимися в созерцании до мышления. Но в дальнейшем обнаруживается, что при операциях над знаками снова всплывает на поверхность бесконечность. Поскольку, например, обобщение с помощью индукции приводит нас к утверждению типа: «существует простое число $>p$», то мы, несмотря на «безобидность» операции, совершаем «прыжок в трансфинитное» [30, с. 353].

Гильберт видит два способа избежать таких «прыжков». Во-первых, можно изменить законы логики. Но на это он не решается. «Мы ведь не хотим отказаться,— пишет он,— от пользования простыми законами аристотелевой логики, и никто, говори он хоть ангельским языком, не удержит людей от того, чтобы отрицать любые утверждения, образовывать частичные суждения и применять закон исключенного третьего» [30, с. 355]. Тут Гильберт был в значительной степени прав, и это в дальнейшем будет показано на примере судьбы логики Брауэра. Во-вторых, Гильберт предлагает «гениальный метод идеальных элементов» [30, с. 355], который математики применяли уже не раз в затруднительных положениях. По отношению к идеальным высказываниям не следует применять привычных законов логики: чтобы примирить те и другие и не потерять их. Для этого и нужно было обращение к априоризму Канта.

Обозримость и конечность объектов математики — вот какова цель всех теорий и приемов Гильберта. Иначе говоря, очень вежливое выпроваживание бесконечности из области действительности в область идеального бытия — вот способ, можно сказать, «почетной ссылки» понятия бесконечности. Ее не отрицают, ее возводят на пьедестал, чтобы она не мешалась со своей диалектической природой!

Принцип обозримости, а значит, и принцип устранения бесконечности из непосредственных математических выкладок — это тот принцип, который Гильберт подчеркивает и в докладе на математическом семинаре в Гамбурге (1927 г.) [30, с. 366]. Обозримость делает возможным и удобным введение формализации и аксиоматизации. Ни от одного закона аристотелевой логики Гильберт не отказывается. «...Построение анализа без них невозможно»,— пишет он о законах логики [30, с. 375]. Но так же настойчиво Гильберт разделяет все математические положения на реальные и идеальные. Под реальными он понимает такие формулы, «которым соответствуют содержательные сообщения конечных высказываний», а под ними понимаются в первую очередь «числовые равенства или неравенства или составленные из них более сложные сообщения» [30, с. 374]. Идеальными же высказываниями Гильберт называет формулы, которые «сами по себе не имеют никакого значения». Подобно этому следует понимать и числовые знаки в содержательной теории. В таких «идеальных образах теории» [30, с. 374] можно допустить многое такое, что невозможно в содержательной теории, например актуальную бесконечность. Рассуждения о знаке и значении, о бессодержательности знака у Гильберта встречались еще в 1922 г. [182, с. 163] и стали актуальной проблемой в математике и логике XX в. Фактически тут в скрытом виде обсуждается вопрос об отношении теории к объективной реальности, т. е. основной вопрос философии.

Против гильбертовой теории доказательства непротиворечивости формализованных аксиоматических систем выступали крупные математики, но он оставался до определенного времени твердо стоять на своей позиции. Свою точку зрения Гильберт изложил в двух книгах: «Основы теоретической логики», написанной в 1928 г. совместно с В. Аккерманом, и «Основы математики», изданной в 1934 г. в соавторстве с Бернайсом. Но во время издания последнего фундаментального труда К. Гёдель (род. в 1906 г.) уже получил свои результаты. Он доказал, как известно, невозможность полностью формализовать даже арифметику, а также невозможность доказать непротиворечивость теории средствами самой этой теории. Следовательно, главное стремление Гильберта — доказать непротиворечивость всякой математической формализованной системы — к успеху привести не могло.

В сущности в результатах Гёделя опять обнаружилась диалектика. Диалектика бесконечного процесса познания, в частности, в том и заключается, что каждая новая теория, каждая научная картина мира (более или менее широкая) всегда является открытой системой. Замкнутость ее только относительна. Всякая же непротиворечивость теории является также относительной. Ведь любая теория противоречива уже тем, что она является системой: поскольку каждая система ограничена как таковая, то она всегда и недостаточно полна, и недостаточно точна. Нет такой теории, которая была бы исчерпывающей и в плане полноты, и в аспекте точности. Вечное соединение ответов и вопросов, решений и содержащихся в них же проблем само по себе делает невозможным законченность и, следовательно, остановку развития познания. Собственно, Гильберту было свойственно утверждение оптимизма в решении вопроса о познаваемости мира. Но, может быть, в силу нетерпения настойчивого исследователя, верящего в науку, он хотел сейчас, теперь, в конечное время видеть уже решенными основные проблемы математики, тем более проблему ее обоснования. Он много сделал для науки, но решить проблему бесконечности не мог, поскольку его мировоззренческие и соответственно методологические установки заранее обрекали его на неудачу.

ИНТУИЦИОНИЗМ

Аналогичное положение было и с третьим течением в обосновании математики — интуиционизмом. Интуиционистские взгляды высказывал еще А. Пуанкаре, но наиболее ярким его представителем был голландский математик Л. Э. Я. Брауэр (1881—1965). С самого начала своей научной деятельности он был убежденным идеалистом, и потому решение вопроса о парадоксах бесконечного имеет у него черты мистицизма. Об этом свидетельствует, например, книга «Об основании математики» [137, с. 10, 12, 66—67, 85]. В этой работе Брауэр исходит из утверждения, что противоречия теории множеств порождены свободным обращением с актуальной бесконечностью. Это, конечно, верно. Такое мнение высказывал А. Пуанкаре и другие математики и логики. Но туманность изложения, явный идеализм Брауэра не способствовали дальнейшему распространению этого осознания причин парадоксов теории множеств.

Чрезвычайно большое значение Брауэр придает интуиции в познании и, в частности, в образовании математических понятий [137, с. 97—99, 127, 171, 180], считает ее необходимой для логического построения математики в качестве первоосновы [137, с. 180; 194, с. 244—257; 195, с. 453—472; 196, с. 451—488]. В своих трудах Брауэр также показал, как можно «оконечить» теорию множеств с помощью полной математической индукции и устранения актуальной бесконечности [196, с. 457—465, 487—488]. Он оставил одну только потенциальную бесконечность с помощью запрещения в логической теории и логической символике термина «все» [196, с. 487], и парадоксы при этом исчезли. Но ведь исчезла и та теория множеств, которую создал Кантор, ибо «душой» его теории является как раз актуальная бесконечность. Однако Брауэра это не смущало.

Обоснование своего отрицания логического закона исключенного третьего Брауэр дал в докладе, прочитанном в 1918 г. и напечатанном в 1929 г. в «Ежемесячнике по математике и физике» [136, с. 153—164]. Он заявил, что формалистическое направление является заблуждением, основанным на «легкомысленной вере» в старую классическую логику [136, с. 158]. Продемонстрировав на ряде примеров, что закон исключенного третьего практически ничего не дает, Брауэр сделал вывод о применимости его только к области конечного [136, с. 163]. Однако в силу трудности заранее понять, с какой областью мы имеем дело, вообще следует остерегаться его применения. Лучше совсем исключить этот закон, так как он является «общим суждением», подобно многим суждениям существования, не имеющим будто бы никакого смысла в математике и пришедшим из философии [136, с. 160]. Математические же суждения и понятия не должны зависеть от «каузальных связей наблюдения», а должны быть априорными [136, с. 159]. Но в то же время существующим может быть признано в математике только то, что можно построить. Только эти принципы, по мнению Брауэра, могут избавить математику от противоречий.

С одной стороны, Брауэр толкует о какой-то мистической «математической праинтуиции» [136, с. 155], которая образуется из математических абстракций, «пустых форм», т. е. «общего субстрата всех двойственностей» [2] (136, с. 154). Именно «саморазвертывание» этой «математической праинтуиции» вводит бесконечное «как мысленную реальность» [136, с. 154], которая обнаруживается определенным образом (очевидно, методом «свободно становящейся последовательности») прежде всего в совокупности натуральных чисел, затем в совокупности действительных чисел и, наконец, «доставляет всю чистую математику» [136, с. 155]. С другой стороны, наряду с подобными мистическими излияниями у Брауэра есть и трезвые критические замечания, которые заставляют обратить серьезное внимание на закон исключенного третьего. Так, он выступает против известного положения, что всякий бесконечный ряд положительных чисел или сходится, или расходится. Например, предположим, что ряд $b_1+b_2+b_3+\ldots$ не сходится. Но ведь предположение его сходимости тоже допустимо. Точно так же, если предположим, что он не расходится, то это не значит, что предположение расхождения абсурдно. Для любого математического объекта, заданного столь же абстрактно, оба из двух возможных предположений равно допустимы. Следовательно, закон исключенного третьего здесь оказывается несостоятельным [136, с. 162]. Можно было бы предположить, что в отрицании закона исключенного третьего содержится некоторый элемент диалектики. Но если она и есть тут, то в совершенно неосознанном и мистифицированном виде. Можно считать абсурдной предлагаемую интуиционистами «ампутацию» [136, с. 160] тех частей математики, в которых обнаруживаются противоречия или, по выражению Гейтинга, «вивисекцию математики» [28, с. 20]. Но некоторые рациональные, конструктивные моменты имеются в интуиционистской логике.

---

[2] Под «двойственностями» Брауэр, очевидно, понимает единство вещественного содержания и их формы-понятий [136, с. 154—155].

Однако у Брауэра трудно найти это рациональное за нагромождением идеалистических и просто мистических высказываний. Гораздо более ясно и четко позицию интуиционизма излагает Г. Вейль (1885—1955) — видный представитель этого течения. Он, как и Гильберт, придает большое значение понятию и проблеме бесконечности. Он даже называет ее в одной из своих работ предметом математики: «Математика — это наука о бесконечном» [25, с. 9]. Давая некоторый очерк истории бесконечности, Вейль обнаруживает понимание того, что противоположность конечного и бесконечного была движущей силой в развитии математики вплоть до настоящего времени. Именно потому, что противоречие конечного и бесконечного никак не могло быть преодолено, хотя иногда и казалось, что это преодоление достигнуто, оно являлось стимулом дальнейшего развития науки. «...Всякий раз, когда, казалось, уже удавалось достигнуть желанного синтеза, старое противоречие возникало вновь и притом в еще более углубленном виде. Противоречие это определяло собою вплоть до наших дней ход развития теоретического познания» [25, с. 9]. Но Вейль, к сожалению, понимает здесь противоречие не как закономерное, а скорее как досадное явление, с которым нужно было бы покончить в математике, но это никак не удается сделать.

Ополчаясь против теории множеств, Вейль высказывает такие положения, против которых постоянно выступал Кантор. Например, Вейль пишет: «Для теории множеств не существует принципиального различия между конечным и бесконечным» [25, с. 17]. Но ведь Кантор многократно повторял и подчеркивал различие конечного и бесконечного. Можно объяснить такое искажение только глубоким непониманием теории множеств и актуальной бесконечности, которая просто-таки пугает Вейля. Он пишет, что «поток бесконечного», исходящий из теории множеств, грозит «затопить в своем течении наш дух» [25, с. 18]. Подобно Гильберту и другим, Вейль видит «опасность» в применении терминов «все» и «существует» к бесконечным множествам [25, с. 14, 20], показывая очередной раз происхождение антиномий бесконечности. Предложения, изложенные Расселом в его теории типов, для Вейля совершенно неприемлемы. Отвергнув эту теорию еще в 1918 г. в своей работе «Континуум», он назвал ее «искусственной и непригодной» [242, с. 23, 36]. Формализм тоже не годится для интуиционистов, так как грозит, по мнению Вейля, сделать математику совершенно тривиальной [25, с. 53]. Против формализма, как и против логицизма, Вейль выступал многократно на протяжении всей своей жизни [240, с. 148, 150, 155, 170, 713—718].

Вейль считает, что только Брауэр создал совершенную теорию континуума. Однако интуиционистское понимание бесконечности на самом деле заставляет ее исчезать, ибо превращает с помощью устранения «экзистенциальных суждений» в «пустую выдумку логиков» [25, с. 23]. Можно говорить о существовании какой-либо последовательности только тогда, когда найден закон ее построения, и она уже построена. Это одна идея Бауэра, на которой зиждется интуиционизм. Вторая идея заключается в том, что не только положительное свойство, но и отрицательное, т. е. отрицание какого-либо свойства, также определяет последовательность. Она определяется уже не закономерным каким-то способом, а с помощью «свободного выбора». Такая последовательность возникает только постепенно, как результат актов этого «свободного выбора» членов, из которых ни один не будет обладать тем свойством, отрицание которого было задано заранее как характеристика любого, каждого числа последовательно. В каждом уже наличном члене такой последовательности можно утверждать или отрицать определенные свойства, но «ни в коем случае нельзя спрашивать, отличны ли от 1 *все* ее члены» [25, с. 24].

Выражение «существует» изгоняется из математики, так как оно нас будто бы сковывает, ограничивая тем, что уже есть, и всячески превозносится выражение «каждый», относящееся к тем членам, которые могут быть построены. «Выражение «существует», — пишет Вейль, — приковывает нас к *бытию и закону*, выражение же «каждый» вводит нас в сферу *свободы и становления*» [25, с. 24]. Понятие множества также отвергается, и вещественное число, например, определяется не через него, а через понятие последовательности, причем задается формула-закон построения каждого члена-интервала этой последовательности.

Последовательность интервалов, в том числе и бесконечная, данная нам с помощью какого-нибудь закона, определяет собой отдельное вещественное число. Континуум же определяется свободно становящейся последовательностью интервалов [25, с. 24—25].

Согласно интуиционизму, математика — область только возможного. К тому же это возможное относится скорее всего не к объективному миру, а к духу, в котором осуществляются как «изначальная математическая интуиция», так и «акты свободного выбора» [25, с. 24, 26]. При этом все, что нельзя непосредственно построить по определенным законам, оказывается вне математики. Вейль отмечает, что «математик со скорбью смотрит на то, как, словно туман, рассеивается бо́льшая часть его высоко вознесшихся теорий» [25, с. 26]. Конечно, нелегко примириться с «уничтожением» теории множеств и других не менее ценных теорий. Но интуиционистам дороже этих достижений «интуитивная ясность», хотя для беспристрастного читателя эта «ясность» иногда подобна густому туману.

Желая показать, что Гильберт не спасает математику от ампутации, которой подвергают ее интуиционисты, Вейль обвиняет его — в значительной степени справедливо — в том, что у него «математика оказывается уже не знанием, а управляемой некоторыми условными правилами *игрой в формулы*, вполне подобной игре в шахматы» [25, с. 27]. Принцип непротиворечивости теории кажется Вейлю не имеющим отношения к истине [25, с. 29]. Это вытекает из основного интуиционистского принципа необходимости доказательства существования и, как следствие этого,— отрицания закона исключенного третьего. По Брауэру, если отрицается одно из двух суждений, в одном из которых отрицается то, что утверждается в другом, то вовсе не значит, что другое неверно, ибо остается некоторая «неопределенность», всеобщность, против которой он и выступает. К тому же, если первое из противоречащих суждений опровергается наличием какого-то неопределенного хотя бы одного объекта, не обладавшего свойством из первого суждения, то это тоже не означает опровержения, так как нужно еще дать способ построения, конструирования такого объекта [25, с. 30]. Таким образом, система интуиционизма достаточно стройна. Но результаты ее чрезвычайно разрушительны.

Интуиционист никогда не говорит «вообще», а всегда в применении к совершенно определенному математическому объекту, достаточно четко очерченному. Если совершают скачок к границам математики, то эта трансцендентная «безумная храбрость» оказывается наказанной тем, что приходится прыгать еще и «через собственную тень, через противоречия». Целью математиков является овладение бесконечным с помощью конечного. Но при этом, по мнению Вейля, мы должны совершить успешный и плодотворный обмен, равный по значению изобретению-обмену бумажных денег [см. 241, с. 330]. Он заключается в том, что мы заменяем осмысленные выражения бессмысленными, не имеющими значения формулами. Но предметом познания, а не пустой игрой эти формулы становятся только в гильбертовой математике [241, с. 331]. Это — путь Гильберта. Для интуициониста же бесконечность не просто сводится к конечному, но заменяется на «открытое поле возможностей» [241, с. 334]. Это первое и главное положение интуиционистов относительно бесконечного.

Другой стороной этого положения является то, что «законченная, актуальная бесконечность как замкнутое царство абсолютного существования» [241, с. 335] не может быть дана нам. Однако дух неудержимо стремится к тому, чтобы «представить бесконечное как замкнутое бытие с помощью символической конструкции» [241, с. 335]. В конце концов Вейль приходит к мысли об ограничении человека и возможности его познания богом. Вот тут-то и обнаруживается «сущность» стремления человека к бесконечному. Оказывается, это есть стремление к богу! Вейль не может просто «оконечить» человека и отказать ему в познании бесконечного, так как он свободен, хотя и связан бытием. «Дух есть свобода к связанности бытия, он открыт по отношению к бесконечности» [241, с. 335]. Но отношения между богом и человеком весьма странные. «И бог не может вторгнуться через откровение в человека, и человек не может к нему пробиться в мистическом прозрении» — так характеризует их Вейль [241, с. 335]. Приходится довольствоваться одними символами. Правда, против аксиоматического метода Вейль, как и вообще интуиционисты, не выступает. Он даже всячески его приветствует, но не видит окончательного спасения в аксиоматике и формализации [241, с. 464—465]. Гейтинг также не возражает против применения аксиоматики, но не находит связи этого метода с проблемой обоснования математики. Он пишет, что интуиционистская теория алгебраических полей «иллюстрирует, как можно применять в интуиционистской математике аксиоматический метод. Нужно, однако, помнить,— оговаривает Гейтинг,— что он совсем не участвует в основаниях математики» [28, с. 63—64].

Вейль, очевидно, не видит спасения и в самом интуиционизме. Иначе он не писал бы в 1946 г. о том, что математика все еще находится в состоянии кризиса — уже около пятидесяти лет! «Внешне кажется, что это не вредит нашей повседневной работе, но что касается меня, то я, однако, должен сознаться, что это оказывает значительное влияние на мою математическую жизнь: это направляет мои интересы в те области, которые я считаю относительно «безопасными», и постоянно уменьшает энтузиазм и уверенность, с которыми я занимаюсь своей исследовательской работой» [241, с. 279]. Не случайно в последние годы жизни (1944—1953) Вейль обращался к физике и опубликовал ряд работ о связи физики и математики, например статью «Теория относительности как стимул математического исследования» (1949) и много других [241, с. 394—400; см. также с. 213—535].

Интуиционисты правы в том, что законы логики, которые безоговорочно действуют в области конечного, не могут таким же образом применяться в области бесконечного [243, с. 78]. Однако непонятно, почему нужно одновременно отказываться и от закона исключенного третьего, и от бесконечности. Логической необходимости в этом не видно. Точно так же верно, что Гильберт не может выйти со своими средствами за пределы конечного, хотя он и старается сохранить бесконечность и всю математику без ущерба [243, с. 55; 25, с. 80].

Хотя интуиционизм принимался далеко не всеми математиками и содержал в себе ненаучные, мистические элементы, тем не менее нельзя согласиться с Н. Бурбаки в том, что будто бы об этом течении «вспоминают как о своего рода историческом курьезе» [22, с. 53]. Интуиционистская школа оказала не только ту услугу науке, что она, как считают Бурбаки, «заставила своих противников, то есть подавляющее большинство математиков, уточнить свои позиции и яснее осознать причины... их веры в математику» [22, с. 53]. Заслугой интуиционистов является также создание конструктивного метода введения понятий с помощью полной индукции. Правда, этот метод в то же время и ограничивал возможности математики, приземляя ее, не давая возможности мысли свободно парить в богатом математическом материале. А ведь только при такой свободе мысли и возможно творчество. Интуиционисты же заставляют мысль математиков идти по строгому ранжиру. Если сюда прибавить еще гильбертов метод аксиоматизации и формализации, то свободный «рай» Кантора превращается в сугубо рациональный сад со множеством строгих надписей типа «по газонам не ходить» и т. п. Конечно, такая упорядоченность уберегает от заблуждений (хотя и на дорожках можно кружить без цели, запутавшись), но она не дает использовать огромные пространства «газонов» в этом «саду» и тем наносит ущерб развитию математики.

Бесконечность с ее явной диалектической природой, с диалектической противоречивостью, казалось бы, должна была заставить математиков заняться осознанием места логики, употреблявшейся до сих пор в математике, в мышлении вообще. Они и занялись этим. Но не в том плане, при котором можно было бы найти правильное решение вопроса. В результате появилось два противоположно крайних, но одинаково не философских, а узких решения проблемы. Логицисты и формалисты взялись за усовершенствование и оттачивание логики, хотя от этого ограниченность самих ее принципов не уменьшилась, а только стала более явной. Интуиционисты же, наоборот, сделали логику несколько более свободной, отбросив в ней закон исключенного третьего, но зато — более расплывчатой, нечеткой. Так или иначе посягнуть на абсолютность закона противоречия, принципа непротиворечивости ни одно из этих течений не смогло, хотя для диалектического разрешения парадоксов это было необходимо.

Таким образом, три главных направления в обосновании математики, возникших в связи с необходимостью устранить парадоксы теории множеств, не справились с задачей, которую они ставили перед собой. Ни логицизм, ни формализм, ни интуиционизм не дали — да и не могли дать в силу своей философской ограниченности — обоснования математики, содержащей в себе противоречие понятие бесконечности.

КРИТИКА И РАЗВИТИЕ ПЕРВЫХ ПОПЫТОК РАЗРЕШИТЬ ПАРАДОКСЫ

К изложенным трем школам, пытавшимся по-разному справиться с парадоксами теории множеств, математики относились и относятся по-разному. Одни принимали актуальную бесконечность, другие — нет и соответственно признавали или отрицали теорию множеств. По отношению математиков к логицизму, формализму и интуиционизму происходит «размежевание». Оставаться равнодушным к этому комплексу вопросов было невозможно, потому что теорию множеств уже вскоре после ее появления положили в основу построения многих математических областей.

Борьба Пуанкаре против актуальной бесконечности. Уже в самом начале века, когда появились первые работы Рассела, Гильберта и Брауэра, многие выдающиеся математики стали устно и письменно выражать свое отношение не только к теории множеств, но и к этим трем течениям. Некоторые математики, начавшие после появления теории множеств излагать различные разделы математики на ее основе, после обнаружения парадоксов стали в оппозицию к теории Кантора и особенно к понятию актуальной бесконечности. К таким относился А. Пуанкаре (1854—1912), который с таким же рвением стал выступать против актуальной бесконечности, с каким раньше перестраивал математику на ее основе [70, с. 180]. Он, как и Л. Кутюра, находился в центре споров по поводу актуальной бесконечности и своими многочисленными выступлениями и печатными работами сделал определенный вклад в развитие проблемы бесконечности, хотя его мировоззрение находилось под значительным влиянием Канта и других идеалистов, к тому же было непоследовательным. Все это мешало ему прийти к научному решению проблемы бесконечности. Непоследовательность идеализма Пуанкаре и его связь с кантианством отмечал В. И. Ленин в своей книге «Материализм и эмпириокритицизм». «...Суть дела «оригинальной» теории Пуанкаре,— писал он,— сводится к отрицанию (хотя он далеко не последователен) объективной реальности и объективной закономерности природы. Совершенно естественно поэтому, что в отличие от русских махистов, принимающих новые формулировки старых ошибок за новейшие открытия, немецкие кантианцы приветствовали подобные взгляды, как переход по существенному философскому вопросу на их сторону...» [6, с. 170].

В тот период, когда Пуанкаре был целиком на стороне Кантора, он писал о его теории с восторгом [94, с. 107] и без оглядки употреблял понятие бесконечности, ибо без него нельзя было обойтись в математике к началу нашего века. В более ранних своих работах Пуанкаре отмечает особое значение бесконечности в связи с анализом характера математического доказательства. Он видит отличие метода математической индукции от обычной индукции в том, что первая позволяет совершить «скачок в бесконечность». По мнению Пуанкаре, математическая индукция (или редукция, как он часто ее называет, поскольку ведет рассуждение от n к $n-1$ и т. д.) — это «орудие», позволяющее переходить от конечного к бесконечному» [95, с. 19]. Оно дает нам возможность обобщать бесконечный ряд чисел или других математически познаваемых предметов.

Пуанкаре отождествляет в определенном смысле бесконечное и общее и тем самым придает бесконечности еще больше значения. Он пишет в связи с арифметикой: «...Идея математической бесконечности уже играет здесь весьма важную роль, и без нее не было бы Науки, так как не было бы ничего Общего» [95, с. 19]. Правда, тут же он высказывает и идеалистическую мысль о том, что эта «редукция» есть «только утверждение свойств самого ума» [95, с. 21] и «априорное синтетическое суждение» [95, с. 8; 93, с. 237; 96, с. 18]. В статье «Математика и логика» Пуанкаре, выступая против формализма Гильберта, прямо пишет о несводимости принципа математической индукции к логике [83, с. 4]. Он противоречит в этом Г. Фреге, который еще в 1879 г. в одной из своих работ выводил индукцию из логики [56, с. 56; 159, с. 25—34]. Пуанкаре придает такое большое значение своей индукции, будто она спасает нас от парадоксов теории множеств. Он считает, что она применима и к конечному, и к бесконечному количеству объектов. Но не следует забывать, что при этом он имеет в виду только потенциальную бесконечность.

Против неумеренного возвеличения индукции справедливо выступил Кутюра, показывая, что математическая индукция применима только к конечным числам, а к актуально бесконечным — неприменима [151, с. 61—63; 56, с. 56—57]. «Рассуждение на основе индукции,— пишет Кутюра,— не является общим приемом математической дедукции, потому что оно применимо лишь в арифметике *конечных чисел*; оно не охватывает бесконечного множества силлогизмов, ибо, наоборот, оно дает возможность доказать какое-нибудь предложение относительно *всех* конечных чисел, избавляя этим от необходимости доказывать его относительно *каждого* из них» [56, с. 56]. Кутюра отмечает, что как раз тут и обнаруживается противоречие между конечным и бесконечным, ибо индукция охватывает бесконечный ряд конечных чисел. «Так объясняются все парадоксы бесконечного числа,— пишет он,— число конечных чисел есть бесконечное число. Поэтому принцип индукции, имеющий силу только для конечных чисел, не может простираться на бесконечное число» [56, с. 57].

Что же касается бесконечного объема общего понятия — с этим Кутюра согласен. Общее понятие может быть бесконечным по объему, но должно быть конечным по содержанию, ибо охват бесконечного числа свойств «делало бы это понятие, в его целом, недоступным мысли» [56, с. 57]. Мысль о количественном расширении объема и содержания понятия до бесконечности интересна в логическом плане, но была уже несколько в другом аспекте у Рассела, о чем пишет и сам Кутюра [56, с. 57].

На возражение Кутюра Пуанкаре отвечает тем, что приводит имевшиеся доказательства теоремы Кантора—Бернштейна относительно бесконечных множеств с помощью метода индукции [83, с. 41—45]. Однако Пуанкаре не понял возражения Кутюра, который отрицал возможность применения индукции не к потенциальной бесконечности, а к актуальной. Таким образом, его опровержение не достигает цели, а положение Кутюра относительно неприменимости индукции к актуальной бесконечности остается в силе. Речь должна здесь идти уже о трансфинитной индукции.

Цермело предлагает Пуанкаре доказательство теоремы Бернштейна с применением «истинно бесконечного», т. е. актуального. Но тот отвергает это доказательство из-за наличия в нем актуальной бесконечности. «...Я отвергаю... его доказательство,— пишет Пуанкаре,— заставившее меня на минуту поверить, что алеф-один [3], может быть, таки существует» [83, с. 146]. Пуанкаре так боится непредикативных определений и антиномий, что с каждым разом все категоричнее отрицает актуальную бесконечность. «Не существует актуальной бесконечности,— утверждает он.— Канторовцы забыли это, и они впали в противоречие» [83, с. 147]. Никакой новой логики он не принимает, теорию множеств с актуальной бесконечностью отрицает. И все это только ради того, чтобы сохранить абсолютность принципа непротиворечивости и вообще прежний строй мышления.

Излагая вопрос о математической непрерывности, Пуанкаре выделяет первую и вторую стадии ее создания. К первой он относит процесс образования рациональных чисел; ко второй — рациональных и иррациональных чисел. Есть некоторое своеобразие в этом построении континуума с помощью рациональных и иррациональных чисел, а также через понятие бесконечно малых различных порядков, которые дают нам возможность говорить о «виде непрерывности третьего порядка» [95, с. 32—39]. Но он считает, что все это только символы, только игра ума, к тому же в высших своих стадиях нигде не применимая [96, с. 50—54]. По мнению Пуанкаре, опытное происхождение понятия непрерывности ведет к противоречиям, так как близкие величины, например, по весу, мы не можем различать с помощью своих органов чувств. Получается. что близкие значения той или иной величины равны для нас, тогда как математически они не равны. Значит, вместо органов чувств должна быть введена математика. «Происходящее отсюда (т. е. из ложных ощущений.— *И. Б.*) нетерпимое противоречие утверждается введением математической непрерывности» [96, с. 50].

---

[3] Алеф-один — это обозначение мощности несчетного множества у Кантора.

Соотношение с опытом высоких абстракций бесконечного и непрерывного носит у Пуанкаре прагматический характер. Абстракции эти нужны, когда они полезны, применимы для чего-то. «Разум пользуется своей творческой силой только тогда, когда опыт принуждает его к этому» [95, с. 39]. Это высказывание нужно понимать именно в прагматическом смысле: разум может генерировать сколько угодно и каких угодно идей совершенно независимо от опыта, который является лишь внешним регулятором того, что нужно генерировать, а что не нужно. Понятия различных видов, порядков и степеней бесконечности мы, конечно, можем порождать своим разумом сколько угодно. Однако, каков же «внутренний» механизм «создания» идей в разуме, остается непонятным. Тем более непонятно, какие идеи считать истинными и отстаивать их, а какие — ложными и отвергать. Остается разве что согласиться с принципом конвенционализма!

Пуанкаре выступил против «логицистских» работ Рассела и работ Гильберта, вышедших после обнаружения парадоксов теории множеств. Уже во введении своей работы «Наука и метод» он отрицает мысль о сведении математики к логике, считая, что для этой цели пытались определить конечное через бесконечное.

Пуанкаре настойчиво отстаивал значение интуиции в математическом творчестве и осуждал увлечение символической логикой. Высказывания по этому вопросу можно найти у него буквально в каждой работе [95, с. 1—25; 93, с. 183—223; 204, с. 11—34; 214, с. 815—835; 203, с.

17—34]. Отсюда понятна его полемика с Кутюра в 1905—1906 гг. по поводу формализма Гильберта и логицизма Рассела. Пуанкаре предельно ясно показал, что он в корне отрицает актуальную бесконечность [83, с. 147] и считает истинной математикой только ту, в которой ее нет. «...Подлинная математика та, где не вязнут в болоте актуально бесконечного...» — пишет он [83, с. 141]. Но доводов против актуальной бесконечности у Пуанкаре нет, кроме того, что она приводит к противоречиям. Полемика Пуанкаре с Кутюра, Гильбертом [30, с. 378, 390—391], Расселом по поводу теории множеств, ее парадоксов и всех вопросов, сопутствующих им, привела к тому, что в конце концов он написал в 1909 г. специальную статью «Логика бесконечности» [205, с. 461—482], где подробно излагает свое понимание бесконечности, которое противопоставляется точке зрения Рассела и других сторонников актуальной бесконечности.

Пуанкаре указывает в первую очередь на то, что является, по его мнению, главным в формальной логике. Он считает, что она изучает общие правила классификации, к которым сводится вся теория силлогизмов. Необходимым условием классификации должна быть неизменность. Если представить себе, пишет Пуанкаре, что сущность классификации заключается просто в том, что два солдата, относящиеся к одному и тому же полку, должны также относиться и к одной и той же бригаде, и к одной и той же дивизии, то принцип незыблемости, неизменности заключается в том, что во время нашего рассуждения эти два солдата не должны переводиться в другую воинскую часть [205, с. 461]. Антиномии потому и возникают, продолжает Пуанкаре, что забывают это простое правило.

Действительно, Пуанкаре с большой четкостью указал, следствием нарушения какого логического правила являются парадоксы Бурали-Форти, Кантора, Рассела, Ришара. В самом деле, в области бесконечных множеств в процессе самой классификации или определения в логическом смысле, что одно и то же [205, с. 465], происходит «перевод», переход множеств из одной категории в другую. Классификация получается «непредикативной» [205, с. 463]. Но ведь дело заключается не только в том, чтобы осознать причины парадоксов, но и в том, чтобы показать, если это возможно, средства избежать их. Пуанкаре показывает, во-первых, что парадоксы возникают при логических операциях и с конечными множествами, например, в случае непредикативных определений и классификаций, но «эти трудности встречаются еще гораздо чаще, когда речь идет о множествах бесконечных» [205, с. 463].

Во-вторых, он показывает, что попытки Рассела и Цермело определенными средствами устранить парадоксы несостоятельны. Доводы против Рассела сводятся к тому, что для самого обоснования типов уже предварительно нужно иметь обоснованной теорию порядковых чисел. Иначе теория типов оказывается совершенно непонятной, ибо в ней фактически нет ответа на вопрос о том, могут ли быть типы трансфинитных порядков α (α — некоторое трансфинитное порядковое число), ω (т. е. первое трансфинитное порядковое число) и т. п. Правда, венгерский математик Ю. Кёниг создал теорию, аналогичную расселовской теории типов, но с включением трансфинитных ординальных порядков. Однако, как пишет Пуанкаре, «без достаточного ... объяснения того, что под этим понимается» [205, с. 469]. Если ответить на вопрос о возможности введения трансфинитных порядков в теории типов положительно, то надо еще объяснить, что́ следует понимать под объектами порядка ω и порядка α [205, с. 469]. Если же ответить на вопрос отрицательно, то «как же теория типов может обосновывать различие между конечными и бесконечными числами,— пишет Пуанкаре,— ведь она лишается смысла, если не предполагать этого различия уже проведенным» [205, с. 449].

Пожалуй, в этой критике теории типов Пуанкаре прав. Рассел в самом деле пытался свести с ее помощью актуальную бесконечность к потенциальной, т. е. к процессу, который постепенно и, казалось бы, неограниченно простирается в бесконечность. Это его слабое место и подметил противник актуальной бесконечности. Аналогичен довод Пуанкаре и против аксиомы сводимости Рассела. Он и здесь указывает на то, что Рассел ничего не говорит о трансфинитных порядках функций, ничего не говорит о различии конечных и бесконечных порядков функций, а без этого определение предикативных функций через аксиому сводимости становится бессмысленным [205, с. 472].

Против попытки Цермело построить аксиоматическую теорию множеств и тем самым спасти ее от противоречий Пуанкаре выступает с тем же доводом. Он считает, что поскольку предполагается заранее «наличная» актуальная бесконечность во множестве, то «обнесение стеной» теории множеств не спасает нас от «докучных посетителей» [205, с. 477], так как они оказываются внутри «монастырской стены». Или, используя другой образ, Пуанкаре пишет, что мы закрыли «овчарню», но вместе с «овцами» закрыли и «волка», если предполагаем наличие *всего* бесконечного числа элементов [205, с. 478]. В целом это верно, как стало известно позже, например, из парадокса Сколема [49, с. 377]. Однако Пуанкаре не приводит никаких особых конкретных доводов против актуальной бесконечности, кроме указания на те противоречия, на тот «порочный круг», на те непредикативные определения, которые вытекают непосредственно из ее применения. Средство избежать «ловушки»-антиномий, по мнению Пуанкаре, только одно: не применять понятия актуальной бесконечности, «не падать в сторону этой ловушки» [205, с. 481]. Никакая бесконечная совокупность не может быть «очевидна по интуиции», поэтому система аксиом, построенная на предположении бесконечного множества, как у Цермело, не годится. Теория типов тоже не годится. Взамен их Пуанкаре предлагает свои три правила, которые будто бы могут нас уберечь от антиномий. Они сводятся к общеизвестным положениям: сводить бесконечное к конечному; основываться только на том, что воспринимаемо; не допускать непредикативных определений [205, с. 482].

Пуанкаре упрекает математиков в том, что они исследуют бесконечность, не заботясь о постижении различия между конечным и бесконечным, без чего исследование бесконечного, по его мнению, не должно предприниматься.

Но как, спрашивается, постигать различие между двумя предметами, если один из них еще малоизвестен?! Исследование свойств бесконечности — это и есть исследование различий его с конечным, и наоборот. Какого-то «предварительного» исследования различия между этими математическими понятиями быть не может. Другое дело, что заранее надо понимать разницу между тем и другим, чтобы не применять способы обращения, позволительные для конечного, к бесконечному, и наоборот. Но это во времена Пуанкаре математики уже достаточно хорошо поняли. Именно поэтому в течение десятков лет после открытия первых парадоксов теории множеств математики и пытались находить как средство обращения с актуальной бесконечностью, так и средство устранения парадоксов.

Эффективизм Бореля. Пуанкаре выступал в основном против логицизма, против теории типов Рассела, в значительной степени дискредитируя ее. Неокантианцы справедливо отмечали, что логицисты и формалисты уничтожают только симптомы «болезни», но не лечат ее, не показывают ее необходимости [143, с. 428].

Формализму и попыткам аксиоматизации теории множеств нанес чувствительный удар Гёдель. Правда, аксиоматизация теории множеств вовсе не стала невозможной после открытий Гёделя. Существует уже много аксиоматических теорий множеств, и тут не следует впадать в пессимизм. Но, как отмечал А. Мостовский в 1954 г., во-первых, у нас «нет критериев, которые могли бы указать правильный выбор из этих многих систем» [75, с. 17]; во-вторых, имеются общие логические трудности применения аксиоматического метода; в-третьих, существуют еще «специальные затруднения» в случае применения аксиоматического метода к теории множеств [75, с. 18]. Под этими затруднениями А. Мостовский, очевидно, подразумевал выяснение вопроса о континуум-гипотезе, о конструктивизме, а также, возможно, факт доказательства Хао Ваном в 1952 г. того, что в определенном плане невозможно «аксиоматизировать теорию множеств при помощи конечного множества предложений» [75, с. 19; 239, с. 56—57]. Так что, хотя аксиоматизация теории множеств возможна и нужна, но она не может быть панацеей от парадоксов. А. Мостовский также высказал мнение, что «сам аксиоматический метод в теории множеств будет, может быть, заброшен» [75, с. 18]. Но в то же время он отмечает, что «некоторые результаты, связанные с аксиоматическим методом, останутся, вероятно, прочным достижением» [75, с. 18]. Наиболее значительными результатами он считает доказательство Гёделем в 1939 г. непротиворечивости континуума-гипотезы и аксиомы выбора и обогащение теории множеств понятием класса. Последнее связано с идеей Дж. фон Неймана о запрещении для сверхобширных множеств быть членами других множеств. Классы — это те множества. которые не могут быть членами других множеств, по аксиоме Неймана [119, с. 124—125].

Интуционисты, по мнению многих математиков, впадали в крайности и вынуждали к большим жертвам. Поэтому их положения были приняты тоже далеко не всеми. Правда, Кассирер, например, критикуя логицизм и формализм [143, с. 425—439], склонен принять интуиционизм. Однако он считает нужным дополнить и изменить его принцип конструктивного построения. Изменения эти имели тенденцию углубить идеализм Брауэра и ликвидировать остатки обращения его к действительности, оставив только область чистого мышления с его «изначальными» принципами. Но в силу идеализма, по мнению А. Мостовского, интуиционизм потерпел неудачу. «Важное философское значение имеют... неудачи,— пишет он,— которые потерпели интуиционисты в своей попытке обосновать математику исключительно на интуиции натурального числа» [75, с. 36].

Математики пытались сохранить старые принципы логики и не слишком «урезывать» при этом математику, чтобы не впадать в крайности интуиционизма. Однако все-таки приходилось говорить или о неприемлемости актуальной бесконечности, или о недостаточности прежней логики, или о том и другом, вместе взятых. Но даже избегая «крайностей» интуиционизма, все-таки приходилось существенно пересматривать многое. Так, Э. Борель (1871—1956), с большим энтузиазмом взявшись одним из первых перестраивать математику на основе теории множеств, затем отошел от нее под воздействием парадоксов и стал придерживаться «полуинтуиционистских» взглядов. Очевидно, именно Борель ввел в математику понятие и метод эффективности, эффективного определения и другие математические понятия. Уже в 1908 г. на Международном конгрессе математиков он отрицал несчетные множества и утверждал, что континуум является «*чисто негативным* понятием» [130, с. 447; 131, с. 162—165].

Это утверждение зиждется на существовании парадокса Ришара, происходящего, по его мнению, из невозможности указания способа определения *каждого* элемента несчетного множества с помощью конечного числа слов. Иначе говоря, такое множество не может быть «*эффективно перечислимо*» [130, с. 446].

Общий вопрос о том, имеются ли другие точки на прямой или нет, Борель считает «метафизическим» и не имеющим влияния на развитие науки [130, с. 447]. «Деловой» подход к математическим понятиям естественно влечет за собой и пренебрежение к философии, которое чревато близорукостью. Отсюда — отбрасывание даже тех достижений, которые уже есть в математике, в частности различения счетных и несчетных множеств. «Различие множеств счетных и несчетных кажется мне не имеющим практического значения»,— пишет Борель [130, с. 447]. Он объясняет это тем, что такое деление не имеет под собой ничего реального. Все множества, по его мнению, следует рассматривать как счетные, с той лишь разницей, что для одних можно указать способ определения каждого его элемента — «эффективно перечислимые» множества, а для других — нельзя [130, с. 447—448]. Следовательно, не все «счетные» множества, по Борелю, являются эффективно перечислимыми [132, с. 229—232]. Эту точку зрения на существование математических объектов он считает «практической» [130, с. 448], «опирающейся исключительно на наблюдаемые реальности», «наименее метафизической» [130, с. 448; см. также 133, с. 124; 132, с. 226—239; 134, с. 91—93] и потому имеющей преимущество перед «классической» точкой зрения на счетные и несчетные множества. Преимущество, конечно, есть, поскольку стремление к «эффективному» доказательству бывает иногда плодотворным. Но эта точка зрения наносит и ущерб, так как из числа исследуемых математических объектов исключаются несчетные множества, а это сужает горизонт математических исследований, сужает их перспективы. Для развития же всякой науки необходимо определенное «пространство» мысли, без которого ученый может превратиться в «ползучего эмпирика». Его плодотворность может найти свой конечный предел именно в отсутствии таких «метафизических» идей, «эффективно» не доказуемых, которыми обогатил науку Кантор.

Эффективизм, как и конструктивизм, имеет в себе значительную долю определенного рода эмпиризма. Недаром его иногда так и называли [73, с. 56; 101, с. 18; 131, с. 150—160]. Эффективисты стремятся сделать математические и другие истины непосредственно, чувственно очевидными. Так, Борель указывает в своей книге «Парадоксы бесконечного», что человечество никогда не докажет бесконечности мира, поскольку это невозможно сделать с помощью наблюдения и эксперимента. «Если вселенная бесконечна,— пишет он,— мы никогда не сможем этого проверить наблюдением и опытом, которые никогда не смогут прийти к концу» [135, с. 8]. Однако, даже если мир конечен, то уже теперь по имеющимся у нас знаниям ясно, что он очень велик, и сомнительно, найдется ли у человечества столько времени для опыта и наблюдений, чтобы суметь измерить его [135, с. 8—9].

Непонятно, почему нужно предполагать возможность только экспериментальной и наглядно-чувственной проверки конечности или бесконечности мира? Ведь существует много способов косвенного доказательства этого. Например, существование математического понятия бесконечности и весьма успешное применение его в расчетах служат таким частичным и косвенным доказательством объективности содержания понятия бесконечности. Но Борель не может вступать в область философских рассуждений: с его точки зрения, они в принципе недопустимы. Он упрекает себя даже за краткое общее рассуждение, которое высказал по поводу возможности доказательства конечности или бесконечности мира. «Оставим, однако,— пишет Борель,— эти космологические рассуждения, почти столь же праздные, как и метафизические, и останемся на твердой почве математической науки» [135, с. 9]. Это он говорит именно в тот момент, когда очень к месту были бы научные философские рассуждения о принципах и методах доказательства. Совершенно непоследовательно, как всегда случается с теми, кто отбрасывает «метафизику», Борель тут же снова в нее «впадает», да к тому же самым худшим образом. Он высказывает без какого бы то ни было доказательства и обоснования идею о том, что математика является «чистым творением человеческого духа» [135, с. 9]. Так пренебрежение к философии оборачивается заблуждением.

Советская конструктивная школа. Советская школа конструктивистов, имея также некоторые общие черты с интуиционизмом, отвергает в то же время его мистицизм и идеализм в трактовке математического знания вообще и, в частности, в понимании бесконечности. Так, еще Н. Н. Лузин (1883—1950) внес некоторые конструктивные положения в советскую математическую школу. Будучи под определенным влиянием Э. Бореля и А. Лебега

(1875—1941), высказывавших в значительной степени интуиционистские положения, Лузин склонялся к конструктивному решению вопроса о существовании математических «объектов». Он принимает борелевский принцип обязательности закона, или правила, по которому должен строиться математический «индивидуум», в том числе и каждый элемент бесконечного множества. Собственно, в силу трудностей бесконечности и ее противоречивости был принят конструктивный метод решения проблемы «существования» в математике.

Более четко, чем у Лузина, и конкретнее о конструктивизме идет речь у А. А. Маркова (род. в 1903 г.), Н. А. Шанина (род. в 1919 г.) и других современных советских математиков. Они выработали специальные принципы конструктивизма, которые признают родственными принципам формализма и интуиционизма. При этом они, однако, осуждают идеалистический принцип «первоначальной интуиции» в образовании понятия натурального числа у Брауэра и Вейля и подчеркивают, что конструктивизм не имеет ничего общего с такими философскими установками интуиционизма, хотя некоторые другие принципы обоснования математики схожи у них с интуиционистскими. «Реальное содержание конструктивного направления в математике,— пишет, например, Шанин,— ни в какой мере не связано с методологическими установками интуиционизма» [124, с. 4; 123, с. 18—19].

В конструктивизме принимается принцип «абстракции потенциальной осуществимости». Под ним понимается возможность совершать определенные операции. «Объекты, определяемые этим методом, характеризуются как результаты развертывания порождающих процессов,— пишет Шанин,— основывающихся на заданных правилах конструирования» [124, с. 3]. Происхождение этого принципа — в индукции, где мы «отвлекаемся от ограниченности наших возможностей в пространстве, времени и материале» [62, с. 8; 110, с. 178; 63, с. 9—10].

Таким образом, следует подчеркнуть, что здесь подразумевается абстрагирование не как простое отбрасывание одних свойств, сторон предметов и выделение, обобщение в них других [123, с. 284], а некоторая идеализация, игнорирование того, что реально мы не можем закончить процесс осуществления операций над бесконечным множеством. Да это «заканчивание» и не нужно, ибо конструктивисты не рассматривают бесконечные совокупности «в целом». Они рассматривают только отдельные — хотя бы и как угодно удаленные — индивиды или «конструктивные объекты». Актуальная бесконечность при этом не используется. Например, натуральный ряд как единый объект не рассматривается. «Такое рассмотрение,— пишет Марков,— было бы связано с абстракцией актуальной бесконечности, выходящей за рамки конструктивного направления и характерной для так называемой «классической» математики. Здесь мы имеем водораздел, отделяющий конструктивную математику от классической» [123, с. 9]. Именно актуальная бесконечность, по мнению конструктивистов, создает не только противоречивость, но и «неосязаемость» математических понятий, базирующихся на ней, поскольку с самой актуальной бесконечностью будто бы невозможно оперировать. «Использование в классической математике абстракции актуальной бесконечности и возникающих на ее основе представлений и понятий приводит к тому,— пишет Шанин,— что многие теоремы классической математики не обладают удовлетворительной (с точки зрения связи с экспериментальным материалом естественных и технических наук) «осязаемостью». В этом состоит главное обстоятельство, побуждающее критически относиться к основам классической математики» [123, с. 22]. Создается очень большой разрыв между «далеко зашедшими идеализациями» и «реальными объектами, составляющими исходный материал для всей цепи рассматриваемых актов абстрагирования» [123, с. 285—286]. Эта связь или оказывается расплывчатой и туманной, «или даже вовсе не обнаруживается» [123, с. 286].

Можно сказать, что «гносеологическим корнем» конструктивизма является разрыв между абстрактным и конкретным, который они решили ликвидировать отбрасыванием актуальной бесконечности и разработкой только конкретных, «работающих» методов исследования математических «объектов» и методов самого их установления. «Трудности возвращения от представлений, понятий и суждений,— пишет Шанин,— в формировании которых участвует абстракция актуальной бесконечности, к исходным реальным объектам и связям между ними во многих случаях оказываются весьма значительными» [123, с. 286].

П. С. Новиков, придерживавшийся также конструктивного направления, указывал в своей работе о математический логике, что с бесконечностью всегда были связаны затруднения и что еще в античной математике с ней обращались очень осторожно [81, с. 16]. Он тоже не мыслил иного обоснования бесконечности, как только через ее построение. Но он понимал также, что она необходима и «неистребима», так как уже прочно вошла в математику. Мы представляем, например, геометрическую фигуру «как бесконечную совокупность точек,— пишет Новиков,— отрезок времени как бесконечную совокупность моментов, движение как бесконечную совокупность отдельных положений движущегося тела и т. д.» [81, с. 17]. Но нужно стремиться употреблять только потенциальную бесконечность. «...Невозможно полностью исключить из рассмотрения бесконечность,— продолжает Новиков,— но зато вполне возможно уничтожить ее «актуальный» характер» [81, с. 21]. Он считал, что пользование понятием потенциальной бесконечности вполне законно: оно необходимо и для математики, и для естествознания. По его мнению, в плане критики основ математики к этому понятию нельзя предъявить никаких претензий [81, с. 22]. Правда, применение понятия актуальной бесконечности «в определенных разумных пределах» [81, с. 19] автором признается. Да это и нельзя не признать, так как актуальная бесконечность не используется конструктивистами только по видимости, даже если они сознательно ограничивают себя понятием потенциальной бесконечности. Ведь еще Г. Кантор совершенно справедливо говорил, что для предположения возможности безостановочного осуществления какого-то процесса нужно уже предполагать, что заранее есть вся неисчерпаемая, бесконечная совокупность объектов. В противном случае невозможно было бы предполагать осуществимость каждого следующего шага. То же самое предполагается и в обычной математической индукции. Так что «абстракция потенциальной осуществимости» — это лишь осторожное и скрытое введение актуальной бесконечности.

Понимание «существования» в конструктивизме примерно то же, что и у интуиционистов. Такое же мы видели и у Н. Н. Лузина: существует только то, что можно построить по определенным правилам. Неопределенных, «расплывчатых» понятий типа «существует» (неизвестно, что и почему) здесь не применяют. Для установления специального «конструктивного» существования разработана теория алгоритмов, которая имела большое значение как для оформления конструктивизма в особое течение, так и для развития науки вообще. «Оформление и развитие конструктивного направления,— пишет Марков,— имело место на основе осуществленного в 30-х годах нашего века уточнения [111, с. 3—4] понятия алгоритма, освободившего это понятие от расплывчатости и субъективизма» [123, с. 9]. Понимание дизъюнкции сводится здесь к тому, что один из ее членов только тогда признается верным, когда есть «осуществимость указания его верности». Иначе говоря, нужно осуществить такой «конструктивный процесс», который в результате даст нам указание верности одного из членов дизъюнкции. Закон непротиворечивости, как это было и у Лузина, не признается достаточно сильным критерием. Вследствие этого отрицаются не только двучленные, но и многочленные дизъюнкции [62, с. 12; 63, с. 12—13].

Таким образом, отношение конструктивистов к закону исключенного третьего несколько напоминает негативность по отношению к нему интуиционистов [116б, с. 35—36]. Марков это признает сам. «Наша точка зрения на закон исключенного третьего,— пишет он,— очень близка к точке зрения Брауэра» [62, с. 44]. Подобные высказывания мы находим и у других конструктивистов. Так, Н. А. Шанин пишет: «...Конструктивное понимание логических связей приводит к тому, что закон исключенного третьего не может быть принят в качестве безусловного правомерного логического принципа в рамках конструктивного направления в математике» [124, с. 9]. У П. С. Новикова неприменимость закона исключенного третьего объясняется тем, что мы не можем «произвести бесконечное число актов проверки» [81, с. 17], будто бы необходимое при применении закона исключенного третьего. Но у конструктивистов нет той категоричности в отношении к данному логическому закону, какую мы встречаем у интуиционистов.

А. А. Марков в 1962 г. писал о том, что он признает доказательство «от противного», в противоположность интуиционистам [123, с. 11]. Но ведь принцип доказательства «от противного» — это другая сторона закона исключенного третьего. Очень подробно об этом писал еще в

1925 г. А. Н. Колмогоров. Проанализировав сущность логического принципа исключенного третьего, он сделал вывод о возможности изложения математики как брауэровского типа, так и такого, в котором применялся бы этот принцип. Он справедливо считает, что у нас не может быть уверенности в истинности суждений, которые доказываются в области трансфинитного с помощью принципа исключенного третьего или эквивалентных ему. Но ведь и без этого принципа обойтись невозможно. Получаемую с помощью таких доказательств математику Колмогоров назвал тогда математикой псевдоистинности. «...Наряду с развитым Brouwer'ом изложением математики без помощи принципа t. n. d. (tertium non datur, т. е. третьего не дано.— *И. Б.*),— пишет он,— должно быть сохранено обычное изложение, пользующееся этим принципом, правда, только как изложение псевдоистинности» (69, с. 667; см. также 193, с. 58—65].

Заслуги конструктивизма в развитии методов исследования математических проблем известны: они показали на практике научного исследования значение логико-математической символики, формул, разработали очень важную теорию алгоритма [124, с. 6; 112; 40]. Заменяя «свободное мышление» и закономерный метод абстрагирования в виде идеализации требованием вводить понятия и теории только с помощью конструктивного метода, с помощью алгоритма, они делают математику очень четкой и «конечной». Для развития кибернетики это очень ценное качество: там нужна именно конечность и большая четкость. Эти качества дают большие результаты и в самой математике. Некоторые ее разделы могут теперь развиваться по такому принципу, чтобы результаты исследований можно было заставить «работать» в математических вычислениях, определениях и т. п. [37, с. 118—168]. Несомненно, что конструктивное развитие математики ведет к конкретизации ее теорий и понятий [10, с. 396—398, 412—415], и ряд идей этого направления по праву заслужил признание не только в советской, но и в зарубежной математической литературе [49, с. 258, 339—342; 71, с, 228—250; 85, с. 190—191; 29, с. 224—228].

Однако конструктивисты не разрушили парадоксов теории множеств, а обошли их. Понятие актуальной бесконечности исключено ими, а не проанализировано, и диалектика, отражаемая в этом понятии, не раскрыта. Это первый недостаток конструктивизма, ведущий к обеднению математики. Вторая его слабость — это некоторого рода эмпирическая тенденция, которая определяется самой сущностью конструктивного принципа построения объектов математического исследования. Но никакая наука не может свободно развиваться, если в ней заранее запрещаются широкие обобщения на том основании, что для них не может быть указан способ воплощения в математическом материале, над которым можно было бы производить определенные операции по строгим правилам.

Советские математики и философы не раз предостерегали от двойной опасности. С одной стороны, можно слишком увлечься прикладными идеями и пренебрегать, в ущерб развитию науки, широкими обобщениями. С другой стороны, есть опасность слишком увлекаться идеальными построениями, являющимися бесплодными, не связанными с закономерным развитием математики. П. С. Александров писал, что обе эти тенденции обеспредмечивают математику, лишают ее возможности закономерно развиваться. «В одном случае,— писал он,— «обеспредмечивание» происходит путем подмены... реального предмета голыми идеалистическими схемами и субъективными «логическими фантазиями». Вторая опасность — это заблуждение грубого «прикладничества», которое отрицает самопроизвольный предмет математической теории, низводя ее на ступень какой-то коллекции *разрозненных* фактов и методов, ценных лишь постольку, поскольку они *непосредственно* годятся для приложения» [101, с. 19—20].

Если целиком эту критику нельзя отнести к конструктивизму, формализму, логицизму и интуиционизму, то совершенно ясно, что тенденции, которые критикует П. С. Александров, в этих направлениях есть. С. А. Яновская критиковала неоднократно интуиционизм за боязнь широких «неконструктивных» обобщений. Анализируя процесс определения через абстракцию в математике, она указывала на то, что страх Вейля и других интуиционистов перед созданием «идеальных предметов» основан на непонимании диалектики процесса образования научных абстракций. При этом вовсе не происходит никаких логических нарушений, о которых говорили, в частности, Г. Вейль и немецкий логик, склонный к махизму, В. Дубислав (1895—1937) [125, с. 52—64].

Конструктивисты не разделяют полностью страха интуиционистов перед общими положениями, но некоторая эмпирическая тенденция, как уже было сказано, есть и у них. Если ее не доводить до крайности, то она не принесет вреда, поэтому всегда следует помнить, что ограничения, налагаемые принципом конструктивизма, создают возможность некоторого крена в эмпиризм, который в наше время связан еще с практикой применения математики к вычислительным машинам, о чем подробнее будет сказано ниже.

С критикой различных течений в обосновании математики выступали многие советские ученые, которые подчеркивали, что необходимо, не нанося урона математике, более решительно применять диалектику в ее материале. Много сделали для диалектико-материалистического понимания сущности кризиса в своей науке и такие советские математики, как В. И. Гливенко, А. Н. Колмогоров, а среди польских математиков — А. Мостовский. С. А. Яновская указывала не раз в своих работах на диалектичность бесконечности и на необходимость содержательного ее рассмотрения [101, с. 85—88, 93].

Очевидно, нужно помнить о том, что всякое обоснование по своей исторической сущности не может быть окончательным и абсолютным [101, с. 31—32], и потому не следует ставить предела развитию математики с помощью одного из возможных обоснований ее. Нужно только отличать научные моменты от ненаучных в таких обоснованиях, что возможно лишь в процессе критического развития имеющихся идей относительно обоснования науки.

Глава III

СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПРОБЛЕМЫ БЕСКОНЕЧНОСТИ

БЕСКОНЕЧНОСТЬ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА

В наше время вопрос о потенциальной и актуальной бесконечностях возник в новом аспекте благодаря развитию теории автоматов. Поскольку там встает вопрос уже о вполне реальном процессе осуществления определенных шагов, то приходится считаться не только с формальной, абстрактной возможностью, но и с вполне объективной, материальной возможностью единичных автоматов. Они могут совершать, разумеется, только конечное число операций, более того, такое число их, которое укладывалось бы в конечное время, соизмеримое с человеческой жизнью. В противном случае мы никогда не получим решения задачи, порученной автомату. В связи с таким положением понятно, например, почему «полуинтуиционист» Д. ван Данциг считает, что нет существенной разницы между очень большими и бесконечными числами. Она заключается только в «степени» величины этих чисел. «Различие между конечными и бесконечными числами,—пишет он,— не существенно, а имеет только степенной характер» [156, с. 276]. Вследствие этого ван Данциг утверждает, что нет существенного различия между формалистическим и интуиционистским обоснованием математики. Действительно, например, число $10^{10^{10}}$ практически недостижимо, поэтому интуиционисты не могут, если они хотят быть последовательными, назвать это число конечным.

Дж. фон Нейман считает в связи с этим, что необходима особая логическая теория автоматов, отличная от обычной формальной логики. Это вынуждается, по его мнению, двумя причинами. Во-первых, тем, что необходимо внести определенность, конечность в цепь «логических» операций, совершаемых автоматом. Безразличия к абстракции осуществимости быть не должно в этой логике. «В ней должна учитываться,— пишет Нейман,— действительная длина «цепей рассуждения», то есть цепей операций» [114, с. 81]. Во-вторых, новая логика нужна потому, что старая формальная логика слишком жестко применяет принцип, который Нейман называет принципом «все или ничего». Иначе говоря, логические операции берутся в идеале, без погрешностей, тогда как в автомате такие погрешности вероятны. «Операции логики...— пишет Нейман,— должны рассматриваться как процедуры, допускающие погрешности хотя и с малыми, но все же отличными от нуля вероятностями» [114, с. 81]. Нейман предпринимает попытку построения особой вероятностной логики, в которой учитывалась бы возможность ошибок [11, с. 68—139]. Тут нам важно отметить, что второй признак «логики автоматов» тесно связан с первым, ибо погрешности тем вероятнее, чем большее число операций совершается. «Если цепь операций достаточно длинна, то суммарный эффект вероятностей отдельных ошибок может... достигнуть порядка единицы, вследствие чего полученный результат становится практически полностью ненадежным» [114, с. 80—81].

Новая логика, по мнению Неймана, должна быть не «комбинаторной» с жесткими «да» и «нет», а «аналитической», т. е. такой, в которой использовалась бы не дискретность, а более гибкая непрерывность, как в математическом анализе, с применением, может быть, даже актуальной бесконечности. Об этом сам Нейман не пишет. Но понятно, что при дискретности логики не может быть и речи об актуальной бесконечности, поскольку то, что осуществлено, есть всегда конечное число шагов. Непрерывность же может «пробегать» бесконечность, ибо в ней не фиксируются отдельные конечные точки, между которыми существуют как бы «провалы». Однако это только условность. На самом же деле любой объект является столь же прерывным, сколь и непрерывным, и в нем можно лишь с относительной точностью выделить отдельные моменты. Но как раз дело в том и заключается, что отдельные моменты — сколько бы их ни было — всегда существуют в конечном числе. Следовательно, если речь идет о конечном отрезке времени и при этом о прерывности, о дискретности процесса, то бесконечности тут быть не может. Если же ввести в «логический» процесс, происходящий в автомате, свойство непрерывности, то возможно значительное углубление в бесконечность [114, с. 81—82]. Мысль о прерывности и непрерывности процессов, о дискретных или бесконечно малых элементах «непрерывно простирающейся среды» Нейман высказывал в книге «Теория самовоспроизводящихся автоматов» [80, с. 120]. Он был за применение в теории автоматов непрерывной математики, опирающейся на анализ. Соответственно это должно было выразиться и в создании новой логики, в частности — вероятностной [80, с. 45].

В одной из своих работ Нейман специально отмечал также значение того, что в машине, в противоположность логике, вводится фактор времени (а, следовательно, и движения, хотя об этом прямо не говорится), что важно для разрешения парадоксов. Он писал, что электрическая схема машины всегда связана «с определенной последовательностью во времени», и это «предотвращает... появление более или менее явных порочных кругов различного рода связанных с «неконструктивностью», «импредикабельностью» и т. п.)...» [11, с. 69]. Таким образом, тут есть интересная попытка подойти к разрешению парадоксов со стороны практического, технического процесса в автоматах. Это весьма знаменательно.

Мысль о практической осуществимости очень большого числа шагов появилась у некоторых логиков и математиков нашего века. Ван Данциг ссылается, например, на Бореля, Маннури, Фреше [156, с. 273—274]. Делается из этой идеи вывод, что практической разницы нет между очень большим числом и актуально бесконечным: ведь все равно ни то, ни другое не осуществимо ни в какой момент нашей жизни, если заниматься пересчетом их элементов даже с помощью вычислительных машин. Но в то же время и те, и другие числа одинаково «мыслимы». Иногда высказывается мысль о некоторой конечной модели бесконечных множеств. Фактически же это идея актуальной бесконечности, к которой приходят от углубления в принцип потенциальной осуществимости. Рассуждения о потенциальной осуществимости обнаруживают, что количественные абстракции очень односторонни. Если говорить о любом конкретном их применении, то мы каждый раз наталкиваемся на качественные «пороги». Об этом, не до конца осознавая философскую сущность дела, и говорят Нейман и многие другие, когда связывают процесс количественной осуществимости то с продолжительностью человеческой жизни, то с техническими возможностями автоматов и т. п. [114, с. 76—81].

Рассуждать о бесконечности в пределах математической логики приходится уже потому, что требуется определенное включение аксиомы бесконечности Рассела, и тогда дается ее интерпретация в виде формул для бесконечной области индивидуумов [145, с. 102—104; 198, с. 30]. Но это влечет за собой парадоксы, поскольку речь идет опять о бесконечных множествах. Для того чтобы избежать этих парадоксов, пытаются устранить бесконечность в явном виде: операции над множествами делаются конечными, а аксиома бесконечности «оконечивается» заменой бесконечности на осуществимость.

Против аксиомы бесконечности выступал, например, Р. Карнап [45, с. 144]. Он давал такую логическую интерпретацию выражениям, что актуальная бесконечность оказывалась не фактически истинной, а только в определенных логических пределах, то есть «*L*-истинной», по обозначению Карнапа. «Эта интерпретация имеет... то преимущество,— писал он,— что предложение, говорящее, что универсум индивидуумов бесконечен, является [в таком случае.— *Ред.*] не фактически, а *L*-истинным.

Таким образом, затруднение, обычно связанное с так называемой Аксиомой Бесконечности, здесь устраняется» [45, с. 144].

Современный логик Хао Ван также рассматривает все течения в математической логике соответственно тому, какая бесконечность принята: актуальная или потенциальная. Он различает с несколькими оттенками вслед за П. Бернайсом два направления: конструктивное и неконструктивное. При этом получается несколько «оттенков». В первую очередь он выделяет «антропологизм», или «финитизм в узком смысле слова» [236, с. 38]. Антропологизмом Хао Ван называет это направление потому, что вопрос о существовании здесь решается в соответствии с конструктивными, реальными человеческими возможностями. Сам он явно обнаруживает склонность к этому крайнему фитинизму, ибо, предлагая применять интуиционистскую логику к «антропологизму», в то же время отмечает, что нельзя согласиться с «произвольно длинными формулами и произвольно длинными доказательствами» [236, с. 41]. Таким образом, даже потенциальная бесконечность оказывается под запретом, что является одним из следствий развития вычислительной техники [17, с. 172].

Если Рассел писал о предположении бесконечно длинного доказательства почти шутя, то теперь, в связи с вычислительными машинами, Нейман и вслед за ним другие, как Хао Ван, пишут уже вполне всерьез о необходимости конечных доказательств и формул [239, с. 56—57]. Таков частный результат взаимодействия влияния на математику, с одной стороны, кибернетики, а с другой — ее «внутренних» логических затруднений. Однако нельзя переделывать всю логику на финитистский лад из-за узкотехнических потребностей, вызываемых к тому же лишь определенным этапом развития техники. Вероятно, есть смысл в создании для машинных процессов специальных логических законов. Нужно только обосновать это определенным образом и не представлять такие законы в качестве всеобщих. Конечно, ограниченная логика будет давать и ограниченные результаты. Применение таких логических законов будет возможно только в ограниченных, заранее оговоренных пределах. Такие логики уже создаются, и всегда четко обосновывается их смысл и границы их применения. Но самое главное в том, что обычно нет понимания принципиальной разницы между некоторым расширением (или сужением) логики и существенным ее преобразованием на основе диалектического понимания процесса мышления.

Представляет интерес то, что бесконечность засталвяет пересматривать логику, в частности принцип индукции, а следовательно, процесс обобщения и абстрагирования, их основы и пределы допустимости. Революционизирующее действие бесконечности, диалектически противоречивой по своей сущности, здесь обнаруживается еще раз. Анализ бесконечности, хотя бы и в потенциальном ее виде, заставляет критически относиться к логике вообще, ломать традиционные положения в ней. В частности, это выражается и в критическом отношении к принципу непротиворечивости и различным его трактовкам. Эта критика, как мы видели, была начата уже интуиционистами. Продолжается она и со стороны современных логиков [60, с. 223], что особенно важно для проникновения в математику диалектики.

СОВРЕМЕННЫЙ ВАРИАНТ СРЕДНЕВЕКОВЫХ ФИЛОСОФСКИХ ТЕЧЕНИЙ

Парадоксы теории множеств заставляют не только пересматривать логику, правильность ее выводов, но и поднимать вопрос о сущности абстракций и их отношении к объектам. Когда логически анализируются различные группы предметов, иногда очень абстрактных, в связи, например, с теорией типов Рассела или теорией стратификации Куайна[1], то с необходимостью приходится решать вопрос о правомерности каждого следующего шага в индукции или в образовании нового типа, нового уровня, о различии этих уровней. Тогда-то и возрождается средневековый вопрос об «универсалиях». Вопрос этот совершенно современный и нужный, но поставлен он и решается в духе средневекового номинализма и реализма. Правда, П. Бернайс считает, что платонизм у современных математиков, как и его отрицание, это не какая-то четкая, обоснованная позиция, а всего лишь один из плодов «духовного экспериментирования», подобного тому, которое наблюдалось по поводу обоснования исчисления бесконечно малых до XIX века [158, с. 265].

Под реализмом, или платонизмом, часто понимают просто вообще все неконструктивистские точки зрения, представители которых признают правомерность общих понятий, не требуя каждый раз специального способа их построения. Так, Хао Ван относит к платоникам самого Кантора и всех, кто признает основные понятия его теории множеств [236, с. 48—53], и решая «номиналистски» вопрос об «универсалиях», обычно примыкает к различного рода финитистским и эмпирическим позициям [33, с. 51—79]. Ведь если общие понятия — только имена, то легко отделаться от актуальной бесконечности и вообще от бесконечности. Однако и тот, и другой способы неверны, односторонни, во-первых, по своей философской сущности как метафизические. Ни в том, ни в другом нет понимания диалектики общего и единичного. Потому, во-вторых, они неправильно трактуют понятие бесконечности, не видя в ней неизбежного противоречия. Платонизм позволяет «удалить» бесконечность в область «идеальных сущностей», как это делал Гильберт, и практически не иметь с нею дела.

---

[1] По мнению X. Карри, теорию стратификации можно рассматривать как «синтез теории типов и аксиоматической теории множеств» [46, с. 49].

Номинализм современных математиков заключается, по-видимому, в том, что они признают только «индивидуумы» и отрицают общие понятия, «универсалии». Но под «индивидуумами» математики понимают теперь совсем не то, что понимали средневековые номиналисты. Точности определения этого понятия мешает то, что неизвестно, где действительно «индивидуум», а где — целый класс их. Иначе говоря, мы сразу наталкиваемся на бесконечность в виде бесконечной делимости и на относительность понятий целостности и индивидуальности. Этой проблемы в средние века не было, она появилась только в нашем веке.

Усложнению проблемы способствовала, вероятно, не столько физика с ее проникновением в атомное строение, сколько теория множеств, возродившая древнюю проблему множественности и единства [14, с. 48—51, 56—57; 42, с. 374] вещей на новой, математической основе. А. Френкель и И. Бар-Хиллел пишут об этом: «...Множества, понимаемые в обычном смысле (т. е. в разделительном смысле.— *И. Б.*), являются тем, что философы называют *универсалиями*...» [164, с. 33; см. также 105, с. 346—347]. Отсюда возникает вопрос о существовании множеств, об их «онтологическом статусе» [119, с. 399].

Таким образом, платонизм и номинализм — противоположные пути, ведущие к одной цели: к устранению бесконечности. Но едино в них не только то, что они ведут к одной цели, а также и то, что оба пути метафизические, односторонние, избегающие диалектических противоречий [210, с. 74—75, 78—79; 211, с. 111—127]. Дело тут не только в непонимании диалектики, но также и в «наивном» идеализме, который порожден преувеличением значений чисто логических операций. Так, Куайн спрашивает, о каких объектах может идти речь, в каком смысле: о прошлых, настоящих, будущих объектах, о «точечных» явлениях или явлениях, «разбросанных» в пространстве и во времени и т. п.

Н. Гудмен, тоже придерживающийся номиналистической точки зрения, пишет в одной из статей: «Мы не верим в абстрактные сущности. Никто не предполагает, что абстрактные сущности — классы, отношения, свойства и т. д.— существуют в пространстве-времени; но мы имеем в виду более, чем это. Мы отказываемся от них вообще» [172, с. 105]. Свой отказ Гудмен и Куайн (статья написана ими в соавторстве) «обосновывают» только тем, что признание абстрактных сущностей ведет к парадоксам. Они указывают, что искусственные способы бегства от парадоксов наводят на подозрение, способствуют заблуждению в воображаемом мире. «Бегство от этих парадоксов очевидно может быть эффективным только с применением альтернативных правил, искусственность и произвольность которых вызывает подозрение, что мы заблудились в воображаемом мире». Боязнь парадоксов называется здесь «философской интуицией», которая и заставляет отказываться как от абстрактных сущностей, так и от бесконечности [172, с. 105—106].

Отказ от бесконечности «обосновывается» существованием в объективном мире конечного числа вещей. Спасение только в сведении предикатов абстрактных сущностей к «предикатам конкретных индивидуумов». Но возникает проблема: к каким понятиям можно свести данные так, чтобы получить большую ясность? Критериев тут нет, и ясности быть не может, так как философские установки Гудмена и Куайпа ненадежны. Сами они видят, что опираться на какое-то «чувство» ясности — это значит не иметь никакой опоры. Вопрос о сводимости абстрактных сущностей — в первую очередь абстракции бесконечности — остается, по признанию авторов, проблемой, которая, нужно отметить, является в значительной степени философской [172, с. 106—108].

Отношение Гудмена к проблеме бесконечности хорошо видно из его доклада, сделанного на одном из симпозиумов в 1956 г. и опубликованного под заглавием «Мир индивидуумов». Оказывается, очень важным аргументом против реализма (платонизма) считается то, что последний может, с одной стороны, создавать классы классов и производить этот процесс до бесконечности, с другой — создавать члены членов [171, с. 19]. Но ведь практически мы этого не можем достигнуть, так зачем же это допускать в принципе! Лозунгом номинализма Гудмен выдвигает положение о запрете делать то, что невозможно закончить. «Не делай того, что не сделаешь»! [171, с. 31]. Опять все во имя финитизма и против бесконечности [170, с. 177—178]. Затруднения, связанные с бесконечностью, стараются устранить всевозможными логическими путями [45, с. 144].

Следует отметить, что в гудменовском номинализме речь идет об индивидуумах не как о реальных, материальных вещах, а как о понятиях, но с предпочтением индивидуумов перед классами, т. е. менее общих понятий перед более общими [171, с. 18][2]. «Номинализм для меня состоит особенно в отказе от признания классов»,— пишет Гудмен [171, с. 16]. «Номинализм, как я его понимаю,— продолжает он,— не включает отрицания абстрактных сущностей, духа, указания на бессмертность или чего-либо такого рода; но требует только, поскольку нечто допускается как сущность, чтобы оно было построено как индивидуум» [171, с. 17]. В общем-то его мало интересует, что такое сущность, лишь бы это можно было построить.

Гудмен поднимает вопрос, почему нельзя сконструировать класс, если конструируют индивидуумы. И тут он усматривает такое парадоксальное положение: «Все, что может быть построено как класс, может быть построено и как индивидуум, но все-таки класс не может быть построен как индивидуум» [171, с. 18]. Класс строится из своих элементов и сводится к ним — так надо понимать примеры, приводимые Гудменом. В общем, заключает он, «пока номиналист может конструировать что-нибудь как индивидуум, он отказывается конструировать что-нибудь как класс» [171, с. 18].

Абсолютная раздельность «сущностей» — вот к чему стремятся и чего требуют номиналисты. В этом, конечно, есть определенный смысл. Ведь если установлена такая раздельность, то нет возможности для больших обобщений и экстраполяций вплоть до бесконечности. Даже соединять, комбинировать «сущности» Гудмен не позволяет. Он обвиняет при этом платоников-реалистов в том, что они создают «классы классов» сущностей, распространяя их до колоссальных размеров, а главное — продолжают этот процесс до бесконечности! То же самое можно сделать и с помощью процесса «разбиения». Номиналист же не плодит сущности, и у него две сущности остаются двумя, даже если их содержание не имеет различий [171, с. 19]. Иначе говоря, из сходства двух сущностей номиналист не делает вывода о необходимости образовывать третью сущность, которая является общим, содержащимся в двух первых. Обобщения не рекомендуются.

---

[2] Подробное изложение точки зрения номиналистов см. в разъяснениях Р. Карнапа [45, с. 299, 304], где он говорит об онтологическом статусе чисел как об идеальной реальности, «отличающейся от материальной реальности мира вещей» [45, с. 304]. Он, правда, различает объективное и идеальное существование, но при этом отдает предпочтение идеальному. Утверждение же объективного существования, по мнению Карнапа, «лишено познавательного содержания» [45, с. 306].

Всевозможные другие тонкости номинализма Гудмена и отличие его от реализма не так уж интересны для проблемы бесконечности. Важно только еще раз подчеркнуть, что современный «конструктивный» номинализм имеет одну цель: «спасти» нас от диалектики бесконечности.

Неоконцептуалистов тоже волнует проблема существования множеств. Они почти смыкаются с конструктивистами в этом вопросе. Этим и объясняется, что к неоконцептуалистам относятся в основном интуиционисты. Характеризуя эту точку зрения, Е. Слупецкий и Л. Борковский пишут: «Они утверждают, что множество существует тогда и только тогда, когда данное множество можно сконструировать из множеств, существование которых интуитивно очевидно или которые ранее были сконструированы. Но они не принимают аксиом или теорем, которые заставляли бы их полагать существующими множества, не поддающиеся конструктивной характеризации» [105, с. 348].

Деление нынешних математиков на неономиналистов, реалистов (платоников) и неоконцептуалистов произошло не потому, что они вдруг все задумались над основным вопросом философии в прямом его виде. Это произошло потому, что некоторые вполне правомерные понятия, например, множество, бесконечность, приводят, как оказалось теперь, к противоречиям, не совместимым с самими основами логики. Таким образом, современный номинализм, как и реализм, непосредственно вытекает из проблемы бесконечности. Отсюда реализм до некоторой степени связан с признанием бесконечности в большей степени, чем номинализм, который можно назвать финитизмом, как справедливо отмечает Хао Ван [237, с. 420]. Правда, и некоторая часть современных реалистов тяготеет к конструктивным методам, а потому и к финитизму. Так, например, «эмпирический реалист» Курт Шютте с сожалением говорит о том, что «строго финитные» методы доказательства невозможны после теорем Гёделя [113, с. 130]. Следовательно, он тоже склонялся к «финитизму». Финитные, конструктивные методы четки и определенны. Естественно, что они импонируют тем математикам, которые мало склонны к «туманным» философским абстракциям, хотя без них тоже невозможно развивать науку. По этой причине и самый ярый математик-номиналист не смог бы совсем отказаться от понятия бесконечности: оно неизбежно возникает вновь, как ни стараются его ограничить [237, с. 419].

Реализм же, допуская более свободно широкие абстракции, более терпимо относится к понятию бесконечности, хотя различие между реалистами и номиналистами часто трудно обозначимо. Можно сказать, что просто реалисты меньше заботятся о бесконечности, а номиналистов она «беспокоит» больше. Но поскольку они обращают на бесконечность больше внимания и стараются ее устранить, то им приходится и больше заниматься изобретением логических способов этого устранения. Отсюда — формализм, различные виды логических теорий бывают связаны с финитизмом-номинализмом. К тому же за сто лет со времени своего возникновения теория множеств, со всеми ее понятиями, не только не отошла в прошлое, но утвердилась, несмотря на сопротивление, и в значительной степени развилась. Поэтому игнорировать ее невозможно. Приходится как-то изощряться, чтобы, не отрекаясь совсем от понятий теории множеств, в то же время обходить ее «острые углы».

Например, Хао Ван пишет о том, что очень трудно обойтись без предположения бесконечности, если нужно ввести переменные, относящиеся к классу, который «рангом выше, чем все положительные целые» [237, с. 419]. Подобные трудности встречаются у «финистов» часто. Так, номиналист Гудмен считает, что исчисление индивидуумов, которое составляет сущность номинализма, теряет свои «философские и интуитивные» преимущества, если предполагается бесконечность [237, с. 420]. Значит, для номиналистов важно не просто то, что признаются предложения только об индивидах, а то, что они должны быть конечны числом. Потому-то Хао Ван и спрашивает в своей статье, не лучше ли будет назвать номиналистическую позицию финитизмом, или «теорией не-бесконечности» (no-infinity-theory) [237, с. 420]. Ясно, что такая финистская теория не может найти всеобщего признания, о чем пишет и Хао Ван. Он не верит в то, что когда-нибудь будет доказано, будто «все разговоры о бесконечности есть не что иное, как сокращенный способ выражения для конечных и дискретных сущностей» [237, с. 420]. Это было бы, по его мнению, большим достижением, но сейчас теория без бесконечности — это «слишком утопично, чтобы быть интересным и значительным» [237, с. 420].

БЕССИЛИЕ ФИНИТИЗМА ПЕРЕД АКТУАЛЬНОЙ БЕСКОНЕЧНОСТЬЮ

Границы между современным номинализмом, реализмом и концептуализмом весьма расплывчаты, поскольку их представители высказывают весьма туманные положения. Более четко современные математики должны, казалось бы, делиться на таких, которые признают бесконечность, и таких, которые стараются обойтись без нее. Действительно, есть большая группа математиков, которые называют себя «финитистами», поскольку стараются исключить из своих рассуждений бесконечность. Но при более подробном рассмотрении их работ оказывается, что они поневоле принимают бесконечность, даже актуальную! Но при этом применяют различные методы, чтобы «спастись» от нее: формалистические, логистические, интуиционистские, конструктивистские приемы и другие своеобразные пути.

Так, например, совершенно нетрадиционно выглядят теоремы Г. Генцена (1909—1945), которые он доказывал, будучи финитистом, еще в 1932 г.: «Имеется бесконечная замкнутая система предложений, для которой не существует независимой системы аксиом», — гласит одна теорема [165, с. 29]. Другая теорема тоже имеет своим предметом бесконечную область суждений: «Для любой счетной бесконечной замкнутой системы *линейных* предложений возможно сформулировать независимую систему аксиом» [165, с. 29; см. также с. 42—52]. От противоречий бесконечности тут как будто бы спасает метод математической индукции и различные формальные ограничения. Однако, если быть очень строгим и точным, то подобные доказательства нельзя принять хотя бы потому, что здесь применяется метод доказательства «от противного» [165, с. 52]. Из противоречивости одного предположения делается вывод об истинности другого. Но, как известно, принцип исключенного третьего, который применяется в доказательствах такого типа, уже задолго до 1932 г. подвергся критике и перестал считаться безупречным. Метод математической индукции также не избежал, как мы видели, критического к нему отношения. Так что и здесь видна необходимость замены старых логических принципов новыми.

В связи с появлением всевозможных логик возникла необходимость, во-первых, пересматривать основы уже существующих разделов математики, исходя из различных логических принципов. Во-вторых, отсюда возникла еще проблема соотнесения, скажем, «классической» и «интуиционистской» арифметики, чем и занимался, в частности, Генцен [165, с. 53—67].

Две теоремы Гёделя (о неполноте формальных систем и о невозможности доказать непротиворечивость формальной системы средствами самой системы), доказанные им в 1931 г., заставляют Генцена и других математиков и логиков (формалистов) искать новые методы доказательства непротиворечивости [165, с. 139—143; 33, с. 314]. При этом одним из первых «действий» почти всегда оказывается «устранение» актуальной бесконечности [165, с. 160—162]. Потенциальность, конструктивность, правило сводимости и другие способы «спасают» логику от противоречий актуальной бесконечности [67, с. 108—110; 165, с. 161, 163—235]. Так, если мы не можем проверить каждый член или каждое суждение из актуально бесконечного множества их, то зато можно о таком множестве делать выводы *в целом* как о конечном. Надо только пренебречь неопределенностью каждого отдельного индивида в таком бесконечном множестве. Но формальное введение кванторов «все» и «некоторые» и для конечных, и для бесконечных суждений позволяет применять одни и те же правила логики и для конечных, и для бесконечных случаев.

Эта точка зрения названа английскими переводчиками Генцена «актуалистской» («an-sich-Sinn»).

Согласно «актуалистам», «...логические связи в трансфинитных высказываниях точно соответствуют связям в конечном случае» [165, с. 162; см. также 167, с. 524]. Тут допускается, что «где-то» в бесконечной последовательности имеется член с определенным данным свойством [165, с. 161—162, 164]. Но эта точка зрения неприемлема для финитиста Генцена. Поэтому он соединяет формалистическую точку зрения с конструктивистской и сближает метод доказательства с методом полной индукции [165, с. 163—167, 262, 311]. Трансфинитная индукция «усмиряется» Генценом с помощью изложения ее как процесса полной индукции для некоторой совокупности элементов, где они рассматриваются как «доступные» и как меньшие одного определенного элемента [165, с. 192—193; 67, с. 143]. Здесь употребляется также процесс сведения одних элементов и множеств к другим. Но Генцен не допускает рассуждений относительно бесконечной области объектов с помощью логических средств, применяемых в области конечных совокупностей. «...Следует *отвергнуть* точку зрения,— пишет он,— согласно которой можно без дальнейших оговорок перенести логические *способы заключения* с конечных областей объектов на бесконечные» [67, с. 111]. По его мнению, бесконечный ряд может рассматриваться не как законченный, а только как становящаяся совокупность. Конструктивное понимание способа становления такой последовательности вполне приемлемо для Генцена [67, с. 108, 110]. Он считает, что только для конечных совокупностей вполне возможно дать (в виде определенной операции, процедуры) способ определения истинности предиката. Для бесконечной же области такой «разрешающей процедуры» невозможно дать в принципе. Генцен понимал, что способы разрешения, действующие в конечной области, невозможно переносить на область бесконечного: «...*Разрешающую процедуру*...— писал он,— применимую в конечной области, уже не удается перенести на... трансфинитные высказывания. Ведь, например, для высказывания о всех натуральных числах нужно было бы проверить *бесконечно много* отдельных случаев, что невозможно. И, вообще, нам неизвестно никакой разрешающей процедуры для произвольных трансфинитных высказываний и сомнительно, чтобы когда-нибудь ее можно было дать» [67, с. 109]. Генцен не ошибся здесь, выражая сомнения. В 1936 г. А. Чёрч в статье «Наразрешимая проблема элементарной теории чисел» доказал, что такая процедура действительно невозможна для бесконечной области [146, с. 363; 191, с. 40—41; 192, с. 101—102].

Но в определенном смысле можно говорить о «достижимости» для бесконечной области, поскольку здесь указан метод редукции бесконечного к конечному. «*Все порядковые числа,*— пишет Генцен в теореме о трансфинитной индукции,— *при их пробегании в порядке возрастания величины «достижимы» в следующем смысле.* Первое число 0,1 считается «достижимым», *если для всех чисел, меньших, чем некоторое число* β, *установлено, что они «достижимы», то* β *также считается достижимым*» [67, с. 143]. Эта теорема дает возможность «оконечить» трансфинитную индукцию, показывая, что от любого вывода с порядковым числом, меньшим β, можно перейти к порядку β, так как это всего лишь конечный шаг. Но аналогичное заключение можно сделать и для выводов с любым произвольным порядковым числом. «...Факт конечности редукционной процедуры,— продолжает Генцен,— переносится с совокупности выводов, порядковые числа которых *меньше*, чем β, на выводы с порядковым числом β.

Следовательно, по теореме о трансфинитной индукции он имеет место для *всех* выводов с произвольными порядковыми числами» [67, с. 144].

Фактически здесь применяется как метод сведения бесконечного к конечному, так и конструктивизм, столь распространенный в нашем веке. Генцен указывает, что понятие «достижимости» в теореме о трансфинитной индукции имеет особый характер. Заранее нельзя сказать о достижимости того или иного числа, но только одновременно «*с доказательством его истинности*» [67, с. 146]. Генцен сам говорит о том, что это определение достижимости «вполне конструктивно» [67, с. 146]. «Число β объявляется допустимым только тогда,— поясняет он,— когда *предварительно* признаны допустимыми все числа, меньшие, чем β. При этом, естественно, встречающиеся здесь «*все*» следует понимать финитно; речь все время идет о некоторой совокупности с единым *конструктивным* предписанием для построения всех ее элементов» [67, с. 146]. Для доказательства теоремы о трансфинитной индукции необходимо постоянно придерживаться «потенциального» понимания «пробегания» бесконечной совокупности, т. е. предполагать продвижение доказательства «*произвольно* далеко» в эту бесконечную совокупность. Бесконечная совокупность чисел, по мнению Генцена, «преодолевается посредством *одной* идеи», как, например, совокупность всех чисел, меньших чем 0,2 [67, с. 146].

Характерно его положение о том, что такая, охваченная одной идеей, бесконечная совокупность оказывается как бы исчерпанной [67, с. 146]. Хотя Генцен и называет такую бесконечность потенциальной, но фактически здесь проглядывает актуальное содержание этого понятия. Он спрашивает: может быть, высказывание «в-себе», т. е. актуально бесконечное, имеет все-таки какую-нибудь ценность и смысл? Отвечая на этот вопрос положительно, он и тут,— очевидно, для безопасности — уходит в «финитность» [67, с. 152].

Генцен разделяет понятия ценности и смысла. Актуальная бесконечность имеет ценность, так как выполняет некоторую как бы методологическую роль, поскольку с помощью сведения к конечному и доказательства его непротиворечивости он заставляет ее «работать» в математической теории.

Но смысл — это соответствие понятия чему-то «действительному», если не считать его финитного смысла, к которому оно редуцировано у Генцена. Одним только доказательством непротиворечивости понятия или высказывания еще не выясняется, соответствуют ли они чему-либо «действительному» [67, с. 153].

Эти рассуждения не удовлетворяют самого Генцена, и в 1939 г. в своей статье «Новые доказательства непротиворечивости для чистой теории чисел» он снова высказывает сомнения относительно правомерности трансфинитной индукции с точки зрения конструктивизма. «Иногда склонны сомневаться,— пишет он,— в финитном характере «трансфинитной» индукции, и все это из-за ее подозрительного имени» [67, с. 190]. Сам он не берется с уверенностью доказывать возможность «финитности» трансфинитной индукции, ибо полной конструктивной проверяемости здесь, конечно, нет, поскольку речь может идти о возможности проверки только некоторого, хотя и протяженного, но конечного «куска» числовых классов. «Я... не в состоянии указать,— пишет Генцен,— на каком «месте» при этом кончается, несомненно, допустимая с конструктивной точки зрения и начинается *сомнительная* трансфинитная индукция» [67, с. 190]. Он обещает рассмотреть этот вопрос позже, но сделать этого не успевает, да это ведь и невозможно в принципе.

Через двадцать лет, в 1958 г., К. Гёдель поднимает этот вопрос снова, из чего видно, что он оставался все еще нерешенным. Тут вопрос поворачивается даже в иную плоскость. Гёдель пишет о «наглядности», ибо финитная математика так и понималась как *«наглядная»* очевидность [67, с. 299]. Но ведь при доказательстве непротиворечивости — что остается, в конечном счете, главной целью математиков в обосновании своей науки — нельзя обойтись без понятий различной степени абстрактности, в том числе и достаточно высокой. Нужно думать о «наглядности» и этих высоких абстракций, хотя Гёдель понимает, что эта наглядность уже совершенно иного рода, чем наглядность понятий, охватывающих «свойства и отношения *конкретных объектов*» [67, с. 299]. Но так как имеется основанное на теореме Гёделя положение Бернайса о том, что необходимо выйти за пределы данной, финитной математики, чтобы доказать ее непротиворечивость, то требуются абстракции достаточно высоких степеней. Тут нужно было бы, по мнению Гёделя, иметь точные понятия для «наглядной очевидности», к чему мы охотно присоединяемся, но и без этого ясно, что полная «наглядность» невозможна для бесконечного числа предметов. Не обрывать бесконечную последовательность рекурсий невозможно, а где ее обрывать, чтобы оставалась наглядность, неизвестно. «...Мы не можем больше обозреть все различные структурные возможности, которые представляются для убывающих последовательностей, и не имеем поэтому никакой возможности наглядно убедиться в необходимости обрыва любой такой последовательности» [67, с. 300]. Здесь возможны только абстракции.

Проблема сводится к двум вопросам: во-первых, о возможности конструктивного построения и, во-вторых, об объективности, о наглядности предметов высказывания. Последнее выражается в требовании, «чтобы объекты[3], о которых делаются высказывания и которые служат исходными данными построений и получаются в результате, были «наглядными», что означает, в конце концов, пространственно-временное сопоставление им элементов, все особенности которых, за исключением равенства и различия, несущественны» [67, с. 301]. Но от этого требования Гёдель отказывается, разрешая вопрос доказательства непротиворечивости теории чисел логическим использованием понятия «вычислимой функции конечного типа над натуральными числами» [67, с. 301] и введением определенных «весьма элементарных» принципов построения этих функций. Основу этого построения составляет опять-таки рекурсия, только особого рода [67, с. 305].

---

[3] Не следует думать, что под «объектами» Гёдель имеет в виду только материальные вещи. Он подразумевает здесь и «комбинации знаков» [67, с. 299].

Здесь опять наблюдается уход от философской проблемы в узкую конструктивность. Философского осмысления проблемы в целом не встречается. Если же мы встречаем общие рассуждения по поводу бесконечности, то ясно обозначается разделение математиков не по тем школам, которые появились несколько десятков лет тому назад, а по их отношению к актуальной бесконечности. Так, в докладе о проблеме бесконечности в математике (1936 г.) Генцен делил всех математиков на «актуалистов» и «конструктивистов», объединяя во второй группе в основном интуиционистов. Сюда же он причислял Кронекера и Пуанкаре [165, с. 224]. О своей близости к интуиционизму он говорил раньше, в статье «Непротиворечивость элементарной теории чисел» [165, с. 169].

Целиком интуиционистскую точку зрения Генцен не принимал, ибо в противном случае «весь классический анализ сведется к полю обломков» [165, с. 236]. Ссылаясь на Гаусса, отвергавшего допустимость в математике бесконечного количества как чего-то законченного, Генцен разделяет концепцию «конструктивизма», т. е. частично — интуиционизма, да и вообще современного финитизма, для которого бесконечность существует только как «становящаяся» [165, с. 225]. Как всегда, единственным доводом в пользу «конструктивистов»-финитистов против «актуалистов» выдвигаются противоречия теории множеств, к которым приводят нас последние и которых будто бы избегают первые [165, с. 227—228]. Генцен занимает промежуточную позицию финитиста, при которой включаются элементы трансфинитного в математику, и сам объясняет такое нарушение границ финитизма наличием теоремы Гёделя о невозможности доказать непротиворечивость теории средствами самой этой теории. Он не считает, что эта теорема указывает на иллюзорность возможности доказать непротиворечивость теории. «Остается, однако, возможным,— пишет он,— то, что непротиворечивость элементарной теории чисел, например, может быть доказана средствами (техническими приемами — «technique».— *И. Б.*), которые, с одной стороны, конструктивны и не включают актуалистского аспекта элементарной теории чисел, но которые, с другой стороны, все-таки выходят за рамки элементарной теории чисел» [165, с. 230]. Этими техническими средствами у Генцена и является трансфинитная индукция, примененная к определенным трансфинитным ординальным числам. Но последние строятся, по его мнению, конструктивно и ничего общего не имеют с актуальной бесконечностью [165, с. 230].

Образование числа ω, стоящего за бесконечной последовательностью всех целых чисел и т. д. до бесконечности, Генцен считает вполне конструктивным и не вызывающим беспокойства [165, с. 236]. Но его доказательство довольно беспомощно. Оно опирается, во-первых, на то, что любое число n из первой последовательности всегда меньше числа ω, и так для любого множества [165, с. 230—231]. Во-вторых, он пытается убедить в том, что трансфинитная индукция есть не что иное, как «расширение» обычной полной индукции: «Если мы замещаем «натуральное число» «трансфинитным ординальным», то мы получаем правило трансфинитной индукции» [165, с. 231]. Генцен уверяет, что здесь так же, как в полной индукции, мы совершаем шаг за шагом, сохраняя тот же самый принцип, хотя числа больше и ситуация сложнее. При этом он считает, что ничего «некорректного» мы тут не совершаем. «Просто» (поскольку известно теперь из теорем Гёделя о неполноте формальной системы и невозможности доказать ее непротиворечивость «внутренними средствами») мы находим «технические средства», внешние по отношению к системе, исследуемой на непротиворечивость. Будто бы Гёдель ничего особенного не открыл, а «просто» нам каждый раз для доказательства непротиворечивости теории требуется «включение новых технических средств» [165, с. 233]. Спасительная потенциальная бесконечность! Одну теорию доказали внешними по отношению к ней «техническими средствами», переходим на следующую ступень и снова ищем «внешних технических средств» и т. д.

Но мы не можем закрывать глаза, как этого хочет Генцен, на то, что в трансфинитной индукции используется законченная, актуальная бесконечность. Ведь к следующему трасфинитному числу переходят лишь после того, как закончилось предыдущее бесконечное множество. Иначе это понять нельзя никак. Мы совершаем здесь не «шаг за шагом», а скачки, и весьма значительные, после того как уже совершили бесконечное число шагов внутри каждого бесконечного множества. Это еще один вариант уступки «финитиста» актуальной бесконечности: он ее вводит под напором развития математических и логических идей, но при этом уверяет, что это только потенциальная бесконечность! Одно только признание трансфинитной индукции, хотя и с некоторыми оговорками и ограничениями, означает, что без актуальной бесконечности невозможно развивать математику и математическую логику. Доказательство же Генценом несводимости трансфинитной индукции до любого ε-числа к обычной индукции — его заслуга в утверждении актуальной бесконечности в современной математике [175, с. 108; 35, с. 385; 174, с. 106—107; 236, с. 13].

Сравнивая в своей статье «Современное положение в исследовании оснований математики...» (1938 г.) различные «финитистские» и «актуалистские» точки зрения, Генцен приходит к выводу, что «актуалисты» торжествуют в области континуума, анализа и геометрии, ибо тут их формы вывода применимы. Но в теории чисел и в тех областях, где объекты математического рассмотрения являются конечными, за основу следует брать конструктивную точку зрения. «В этих областях... (т. е. «конечных».— *И. Б.*),— пишет Генцен,— применение актуалистских трансфинитных форм вывода (т. е. способа «на-себя» — выводов.— *И. Б.*) едва ли приносит пользу. Другое дело в области *континуума,* в анализе и геометрии. Здесь актуалистская точка зрения празднует свой триумф; конструктивистский подход является здесь практически низшим» [165, с. 250; см. также 166, с. 18]. Заключает Генцен, как всегда, компромиссно: совсем отказываться от актуалистской точки зрения нельзя, так как она имеет свое определенное значение, особенно в физике. Но и конструктивный способ вывода также приносит много пользы. Вопрос же о том, является континуум только «фикцией, как идеальный образ» или обладает реальностью независимо от наших конструктивных средств,— это будто бы «чисто теоретический вопрос», не имеющий практического значения для математики. Решение этого вопроса должно быть, по мнению Генцена, делом вкуса! [166, с. 18].

Так иногда обнаруживается непонимание значения философских проблем своей же науки у некоторых математиков.

Финитистские представления Генцен смыкает с интуиционистскими ради «преодоления» актуальной бесконечности, втиснув ее в рамки потенциальности и осуществимости. Но тем не менее актуальная бесконечность не дает покоя и постоянно требует своего осмысления, вынуждая к этому математиков тем, что оказывается «неистребимой». В связи с ней приходится всячески видоизменять логику, совсем недавно казавшуюся математикам непоколебимой. Но и внутри самой логики обнаруживается актуальная бесконечность! Так, Брауэр проявлял негативное отношение не только к закону исключенного третьего, но и к доказательству «от противного», поскольку для бесконечного множества объектов в этом доказательстве надо предполагать бесконечность уже «осуществленной», а это как раз «недопустимая» актуальная бесконечность! Об этом, в частности, пишет А. Лебег. Если идти прямым рассуждением, то нужно перебрать все числа. «Чтобы получить свойство P для всех чисел,— подчеркивает он,— нам нужно было бы употребить бесконечное множество силлогизмов» [57, с. 270]. Предположение же о том, что есть какое-то число N, для которого не выполняется свойство P, т. е. доказательство приведением к абсурду, само требует «завершенного» бесконечного множества силлогизмов. Ведь предположенное число N, не обладающее свойством P, можно предположить в любом пункте бесконечного множества. Следовательно, его можно предположить бесконечно далеким от единицы, обладающим свойством P. Но тогда мы наталкиваемся, во-первых, на трудность самого нахождения этого числа, его выделения, ибо за ним всегда можно предположить другие числа. Во-вторых, если все-таки предположить абстрактно, что мы имеем в N это недостижимое число, то тогда нам еще одновременно придется предположить и то, что мы завершили процесс пересмотра бесконечного множества чисел.

Следовательно, тут мы везде наталкиваемся на актуальную бесконечность. «Таким образом,— пишет Лебег,—

утверждение о существовании N, на котором мы основали наше доказательство от противного, само оправдывается лишь сведением к абсурду и употреблением актуально-бесконечного множества силлогизмов» [57, с. 271]. Понятно отсюда, почему интуиционисты вместе с законом исключенного третьего отрицали и метод доказательства от противного.

Р. Гудстейн также показывает в некоторых своих работах, что логический закон исключенного третьего фактически неверен, ибо кроме «да» и «нет» может быть еще множество различных значений. Так, он приводит пример, когда при опросе некоторого количества людей получают три, а не два типа ответов: «да», «нет» и «не знаю» [174, с. 4]. Он отмечает также, что создание многозначной логики в 1920—1921 годах Э. Постом и Я. Лукасевичем (независимо), а затем трехзначной имеет большое значение и применяется с успехом не только в различных областях обоснования математики, но и в квантовой физике [174, с. 6]. Однако и это не спасает положения.

В определенных исчислениях введение некоторых объектов обусловливается обязательно конечным числом шагов. Так, Р. Л. Гудстейн пишет о некоторой части логики, определимой в исчислении равенств, что в ней существование числа вводится конечным числом шагов. «Эта ветвь логики,— пишет он,— характеризуется тем фактом, что *существование* числа с данным свойством в нем может утверждаться только тогда, когда число, о котором идет речь, может быть найдено за определенное число шагов» [176, с. 11; 35, с. 95].

Основываясь на результатах Генцена, Гудстейн развивает идею сводимости трансфинитной индукции к обычной. Он устанавливает этот результат сведения для ординалов «не бо́льших, чем $\omega^{\omega^{\omega}}$» [175, с. 108; 35, с. 385]. Тем самым понятия, введенные Кантором и бывшие долго почти под запретом, как бы исподволь, силой развития самих математических идей снова выдвигаются математиками, в новой интерпретации, в новой конкретизации. Так, Гудстейн рассуждает о счетно-бесконечном множестве аксиом, как будто оно достижимо [35, с. 141], а об относительности счетности и несчетности бесконечных множеств — как об обычном явлении.

Парадокс заключается здесь в том, как известно, что множество, являющееся несчетным в одной аксиоматической системе, может быть счетным в другой (антиномия Сколема). По мнению Гудстейна, несчетность оказывается как бы случайной, поскольку в другой системе несчетный класс становится счетным. На самом же деле здесь конкретизируется диалектическое положение о принципиальной невозможности замкнутости всякой системы истин, в том числе и формализованной, аксиоматической. Но диалектический принцип открытых систем не осознается Гудстейном, как методологический, как всеобщий, хотя, казалось бы, парадоксы теории множеств должны наводить на диалектические размышления. В работе «Булева алгебра» Гудстейн говорит о конечной и бесконечной булевой алгебре, об их соотношении и о соотношении конечных и бесконечных множеств, не смущаясь тем, что бесконечность здесь рассматривается как «охваченная» сразу [173, с. 109—114].

Появление всевозможных логик свидетельствует о том, что традиционная логика с появлением теории множеств и парадоксов бесконечности обнаружила свою неуниверсальность. Введение новых логических систем говорит о стремлении иметь логику, более соответствующую новому математическому материалу. Но такой может быть только та логика, законы которой являются более адекватными по отношению к закономерностям объективной реальности, а следовательно, и по отношению к математике. Можно рассматривать шаги в развитии математической логики, сделанные на протяжении XX в., движением навстречу диалектической логике.

Если современные математики и логики, не приемлющие диалектики и материализма, бьются над разрешением парадоксов вслепую, то марксистские логики сознательно решают конкретную проблему нахождения определенных методов отражения противоречий в логике понятий. Так, Ю. А. Петров считает, что вопрос о логическом отображении движения, использующего абстракции бесконечного, можно решить на пути особого диалектического синтеза эмпирических и формальных описаний. «Отображение движения,— пишет он,— в таком случае будет представлять синтез предложений, основанных на эмпирических данных... и предложений некоторой формализованной теории... Синтез не приводит к логическому противоречию, так как он означает не конъюнктивное соединение эмпирических суждений с предложениями формальной теории, а установление диалектической связи между ними» [89, с. 159].

Однако автор несколько ограничивает проблему, сводя ее в основном к проблеме логического отображения движения как соотношения формальных эмпирических суждений. Между ними нет и не может быть конъюнкции и потому, по мнению Ю. А. Петрова, логического противоречия здесь нет. На самом же деле противоречие все-таки возникает, когда отражаются два противоположных свойства, даже если они и «разведены» по разным уровням и формам описаний. Ведь в некоторых ситуациях эти противоположности совмещаются в одном и том же рассуждении, и тогда «развести» их никак нельзя.

А. А. Зиновьев занимает следующую позицию по вопросу о возможности устранения трудностей логического выражения «переходных состояний объектов» [41, с. 249], когда возникают парадоксы. Он считает, что вполне возможно формальными средствами описать «переходную» ситуацию, если только это делать корректно, применяя те логические формы, которые пригодны в данном случае. Так, например, если рассуждают по правилам двузначной логики, а в то же время допускают трехзначность высказываний, то получается действительно парадокс. Зиновьев считает, что этот парадокс устраняется тем, что применяется логика, соответствующая данному предмету рассуждения, ибо законы логики универсальны и не зависят от специфики объектов. От этой специфики зависит только то, какие именно из законов должны использоваться [208, с. 241—242].

На этом пути А. А. Зиновьев может легко показать, как разрешаются частные случаи парадоксов с помощью применения логики, соответствующей данной частной ситуации. Но ведь остается вопрос о том, во-первых, как между собой соотносятся различные логики и, во-вторых, где же критерий того, что в данном случае нужно применять ту, а не эту логику, те, а не иные законы логики.

А. А. Зиновьев считает, что каждая новая логическая система обогащает теорию научных знаний, что на пути развития новых методов логики происходит создание «некоторой единой и систематически построенной науки о научных знаниях» [41, с. 255]. Это действительно является плодотворным путем развития общей логической теории научных знаний. Но нам кажется, что этот путь должен быть дополнен осознанием, во-первых, объективного содержания законов логики, а во-вторых, диалектико-материалистическим анализом значения классического логического принципа непротиворечивости. Без этого нельзя устранить логические трудности «переходных состояний объектов».

ЗАКОНЫ ФОРМАЛЬНОЙ ЛОГИКИ И ДИАЛЕКТИКА

Все существующие ныне попытки устранить противоречия теории множеств восходят к трем известным в нашем веке течениям в обосновании математики: логицизму, интуиционизму и формализму. Так, конструктивизм произошел, с бо́льшими или меньшими изменениями, от интуиционизма. Аксиоматические системы, имеющие целью также достижение «мира и покоя» в математике,— от формализма. Попытки дать такое развитие теории типов (Рассела и Уайтхеда), которое устранило бы и недостатки логицизма, и парадоксы теории множеств, естественно, восходят к логицизму. При этом часто в том или ином современном «анти-антиномийном» методе можно обнаружить идеи не только одного из трех известных течений, но и некоторый синтез всех их главных идей. Например, трудно отличить, где кончается влияние формализма в теории аксиоматизации или в целом в данной логической теории и начинается влияние интуиционизма. Но все-таки каждый раз такое родство можно найти. Объясняется это, очевидно, тем, что в трех названных течениях были заложены те основные направления, в развитии которых возможны поиски. Действительно, для устранения парадоксов можно идти по трем путям. Во-первых, это путь поисков такого метода построения теории, который давал бы возможность устранять в ней парадоксы непосредственно. На этом пути была найдена теория типов. При этом прежняя логика с ее законами оставалась нетронутой. Во-вторых, можно было избрать путь более строгого, жесткого применения логики, также без изменения ее, лишь с конкретизацией того, что необходимо для такой строгости. В этом направлении был получен метод формализма Гильберта. Наконец, в-третьих, можно было пойти по пути изменения самой логики и прийти к более или менее радикальной ее реформе. Это — путь интуиционизма.

Возможны ли существенно иные направления в попытках разрешения парадоксов бесконечности? Если не выходить за пределы логики[4], то вряд ли возможны принципиально новые пути. В связи с методами, подобными теории типов, возникает вопрос о соотношении абстракций различных уровней, о соотношении общего и единичного, но в формальном плане. Все это не выходит за пределы логических проблем. Если же некоторый намек и есть на более широкие философские вопросы, то их развитие не имеется в виду. Точно так же и формализм, и интуиционизм, хотя и содержат некоторые тенденции выхода за пределы логики, но скорее вынужденно, чем сознательно. К тому же указание на этот выход обнаруживается по-разному. Формализм, именно из-за жесткости, крайней строгости своих логических правил привел к доказательству противного, т. е. того, что абсолютно замкнутая и жесткая система оказывается невозможной в принципе, если пытаться включать в нее собственное обоснование. Тут бы и выйти математикам за пределы логики, понять бы диалектику и принять ее как основу дальнейшего развития логики. Но, как известно, этого не случилось.

Некоторые математики и логики, не взирая на результаты Гёделя, стремятся продвигаться дальше по линии формализма. Так, И. Хинтикка и К. Яакко показали в 1957 г. еще более сильные принципы формализации теории, чем те, которые были известны ранее [183, с. 245—249]. Но, как уже теперь ясно, это не может спасти положение. То, что законы формальной логики неприменимы безоговорочно к познанию диалектических противоречий бесконечности, совершенно ясно показала еще в 1936 г. С. А. Яновская [101, с. 85—88].

---

[4] Мы понимаем здесь под логикой все те современные и традиционные логические теории, которые не включают в себя в явной форме диалектические законы, в первую очередь — закона противоречивости всякого движения и развития. Вопрос о соотношении формальной логики (в самом широком смысле) и диалектической в общем плане здесь не рассматривается. По этому вопросу есть обширная литература [см., например, 13, с. 99—114; 53, с. 57—79].

Интуиционизм же, хотя и совершил по видимости революцию в логике, но на самом деле это была только реформа, так как понимание принципа непротиворечивости как абсолютного и универсального не было даже подвергнуто сомнению. Реформа эта была половинчатой уже потому, что непоследовательно устранять один закон логики и оставлять другие; ведь они теснейшим образом связаны, и если уж отрицается один закон логики, то следовало бы пересмотреть и другие вслед за ним, ибо все три закона говорят примерно об одном и том же: о запрете вносить какие бы то ни было изменения в содержание понятий и суждений на протяжении рассуждения. Можно только выявлять то, что в этих понятиях и суждениях уже содержалось заранее или вытекает из простейшего их соотношения. При этом не допускается изменение ни содержания понятий, которые участвуют в рассуждении, ни их объема. Закон тождества говорит об этом прямо: на протяжении рассуждения понятия должны оставаться одними и теми же. Следовательно, логический процесс рассуждения должен предполагать неизменность предмета рассуждения. Ни какие-либо внешние факторы, ни сам процесс рассуждения не должны изменять понятия, участвующие в нем. Следовательно, законы логики не предполагают столь существенного развития предмета мысли в процессе рассуждения, чтобы при этом изменялось содержание участвующих в них понятий. А ведь такое развитие часто происходит!

Но рассмотрим, далее, эти законы и их соотношение. Закон тождества, во-первых, как уже было сказано, не предполагает развития понятий; во-вторых, он застраховывает от противоречий между понятиями, ибо при его соблюдении уже не может быть такого положения, что одно и то же понятие имеет разное содержание в различные моменты рассуждения. Закон противоречия тоже обусловливает определенную неизменность мысли, но иным путем, более косвенным. Он указывает на недопустимость одновременной истинности двух противоположных высказываний. Но это, по сути дела, означает, что не должно происходить никакого изменения, и предмет высказывания должен оставаться одним и тем же. Ведь при появлении любого различия в объекте два высказывания о нем будут обязательно различны. Следовательно, одно из них должно обязательно отрицать определенную совокупность свойств, а другое — утверждать ее, поскольку она является уже иной. Обычно здесь оговаривается, что отрицание и утверждение одного и того же признака не могут осуществляться в одно и то же время. Но это означает, что на протяжении рассуждения уж во всяком случае не должно встречаться двух таких противоположных высказываний. Это в свою очередь означает, что законом противоречия отвергается возможность существенного изменения содержания понятия, а следовательно, и целого высказывания, на протяжении данного логического рассуждения, каким бы продолжительным оно ни было. Таким образом, для результатов рассуждения ставится граница. Она является качественной, ибо позволяется как угодно долго и длинно рассуждать, но не переходить некоторых границ: в содержании понятий и суждений ничто не должно меняться. Любое суждение и любое понятие от начала до конца должно оставаться тем же самым по своему содержанию. Но это — закон тождества. Таким образом, мы и приходим к существу требований закона противоречия и закона тождества.

Пожалуй, в наиболее сложном отношении к противоречиям стоит закон исключенного третьего. Если в законе противоречия утверждается, что два противоположных суждения не могут быть одновременно истинными, то закон исключенного третьего утверждает, что два противоположных суждения не могут быть оба ложными. Но, если закон противоречия безоговорочно относится к любым видам противоположных суждений, то закон исключенного третьего требует очень важной оговорки. Как известно, противоположные суждения делятся на противоречащие и контрарные [21, с. 83—86]. В случае противоречащей противоположности возможно, во-первых, что одно из утверждений будет общим, а другое — частным, и, во-вторых, что оба утверждения единичные. При контрарной противоположности оба высказывания общие. Закон исключенного третьего относится только к противоречащим высказываниям и не относится к контрарным. Чем это объясняется? Дело в том, что закон исключенного третьего иначе еще формулируется и понимается так: «или одно истинно, или другое; третьего не дано» (tertium non datur). Но если в случае противоречащих суждений, кроме имеющихся в них утверждения и отрицания, ничего не может быть высказано по данному поводу относительно данного понятия или объекта, то в случае контрарной противоположности такая возможность есть. Возьмем, например, несколько пар противоречащих суждений:

I. 1. Все числа натурального ряда четные.
2. Некоторые числа натурального ряда нечетные.
II. 1. Ни одно число натурального ряда не является четным.
2. Некоторые числа натурального ряда четные.
III. 1. Число 15 является четным.
2. Число 15 не является четным.

В первых двух парах суждений речь идет о натуральном ряде, члены которого могут быть или четными, или нечетными. Абстрактно говоря, или все эти числа могут быть четными, или некоторые, или ни одно из них. Но к трем возможностям неприменим принцип «tertium non datur», так как здесь третье уже заранее дано в «количественном» выборе. В каждой паре приведенных суждений участвуют только «все» и «некоторые. Если выделить в два противоположных суждения «все» и «ни одно», то это будет контрарная противоположность, к которой, как известно из традиционной логики, закон исключенного третьего неприменим [15, с. 20; 52, с. 123—128]. Чтобы два противоположных суждения не могли быть одновременно ложными, нужно, чтобы их совокупность исчерпывала все возможные характеристики объектов в отношении к данному свойству. Исходя из такого положения, мы должны были бы признать неприменимость принципа «tertium non datur» не только к контрарным высказываниям, но и по отношению к большинству противоположных. Исключение составили бы только противоположные единичные высказывания, поскольку одному и тому же явлению может быть или присущ, или не присущ данный признак. Третьего быть здесь не может, если не принимать во внимание такого диалектического положения, когда предмет в одно и то же время и обладает, и не обладает этим признаком. Но об этом речь впереди. Пока мы можем считать, что третьего, промежуточного тут не дано. В случае же общих и частных (утвердительных и отрицательных) высказываний имеется все-таки три, а не две возможности! Но эти три возможности распределяются по две на каждую пару суждений. Нужно было бы рассматривать сразу все три возможности, и вот из них-то действительно всегда одна и только одна должна быть истинной, а остальные две ложными.

Встает вопрос: почему же, когда из трех возможных посылок остаются только крайние, закон исключенного третьего не действует, но действует, если мы отбрасываем одну из контрарных противоположностей? В том случае, когда остаются только контрарно противоположные суждения и закон не действует, это очевидно, потому что остается третья возможность в виде частичного отрицания, которое охватывает все промежуточные стадии между всеобщим отрицанием и всеобщим утверждением, в своей неопределенности («некоторые»!). Но если берется вариант, состоящий из частного и общего высказываний, то в одном случае отбрасывается общее отрицание, а в другом — общее утверждение. Почему же это не мешает нам применять закон исключенного третьего? Почему не обнаруживается третья возможность, т. е. принцип «tertium non datur»?!

Вероятно, это происходит потому, что неявно предполагается в одном из противоположных высказываний не просто «некоторые», а «по крайней мере некоторые». Это остается незаметным потому, что логически принципиально важно, чтó противостоит общеутвердительному (или общеотрицательному) суждению: более слабое или более сильное опровержение. Разница лишь в том, с чего мы начинаем, с сильного, всеобщего отрицания, или со слабого, частичного. Если начнем со всеобщего отрицания, то это является очень категоричным и не дает возможности предполагать иной вариант опровержения, менее сильного, частичного. Но если мы начинаем с частичного отрицания, то при этом часто действительно в неявной форме предполагается доведение «некоторых» почти совсем до «всех». Ведь «некоторые» — квантор весьма неопределенный, растяжимый до больших пределов. Если за ним нельзя с определенностью предполагать всеобщей принадлежности данному классу, то ведь может все-таки и не быть противоречия между двумя суждениями, в одном из которых данный признак утверждается как принадлежащий только части элементов множества, а в другом суждении — как принадлежащий всем элементам этого множества.

Таким образом, неопределенность термина «некоторые», отсутствие при нем ограничивающего слова «только» создает ту двусмысленность, которая и порождает видимость охвата всех возможностей относительно принадлежности данного признака — предмету. К тому же «исчерпанность» этих возможностей предполагается неявно, и это создает еще большие условия для появления иллюзий относительно исключенности какой-либо третьей возможности при наличии двух суждений, одно из которых общее, а другое — частное. Но тут весьма важно отметить, что, признавая, хотя бы и неявно, что частноутвердительное и общеутвердительное высказывания (или частноотрицательное и общеотрицательное) могут быть оба истинными, мы нарушаем закон противоречия, поскольку эти пары суждений противоположные, а таковые оба одновременно истинными быть не могут.

Таким образом, ясно, что на самом деле, строго говоря, вполне допустимо, чтобы из двух противоположных (не контрарных и не единичных) суждений оба были ложными. Например, два высказывания:

Все числа натурального ряда дробные.

Некоторые числа натурального ряда целые (недробные)

вовсе не исчерпывают возможностей, и, строго говоря, оба являются ложными, так как на самом деле все числа натурального ряда являются целыми, а не некоторые. Но поскольку допускается положение, что частноутвердительное высказываение не противоречит соответствующему общеутвердительному, то в данном случае не видят противоречия. На самом же деле оно есть, ибо «некоторые» — это не «все», и они взаимоисключают друг друга, если предполагается «только некоторые».

Следовательно, закон исключенного третьего, рассматриваемый в таком аспекте, оказывается недействующим, если принять строгую формулировку: «*только* некоторые».

Конечно, допущение некоторой неопределенности исторически объясняется тем, что познание явлений, не имеющих данного признака, происходит постепенно, «по частям». По этой причине уже первый найденный случай, отрицающий то, что утверждается во всеобщем высказывании, сразу же опровергает его. Но опровергает пока еще только его всеобщность. Принадлежность некоторым элементам множества данного признака не отрицается частным суждением об этом множестве и данном признаке. Частноутвердительное (или частноотрицательное) суждение не опровергает целиком не только общеутвердительного, но и общеотрицательного суждения. Частное высказывание, очевидно, по самой своей сути может подтвердить или опровергнуть какое-либо общее положение только частично. Целиком оно опровергает только его общность. Но, опровергая всеобщность данного высказывания, частное не опровергает высказывания, контрарного этому общему. В этом смысле частное суждение может быть ложным одновременно с другим, противоположным ему общим утверждением, и закон нарушается. Так, в приведенном выше примере с двумя суждениями относительно натурального ряда, как уже говорилось, оба суждения ложны, а истинным является третье. Частноотрицательное суждение («некоторые числа натурального ряда недробные») отрицает только общеутвердительное суждение («все числа натурального ряда дробные»), но не отрицает общеотрицательного («все числа натурального ряда недробные»), поскольку не оговаривается, что *только* некоторые числа натурального ряда недробные. В противном случае было бы положение, когда явно оба противоположных суждения были бы ложными.

В целом ясно, что всегда существуют не две, а по крайней мере три возможности количественной принадлежности данного признака определенному классу явлений. Объясняется это тем, что два общих контрарных суждения выражают крайние точки принадлежности одного и того же признака классу явлений. Частные же суждения охватывают собой все промежуточные стадии принадлежности этого признака. Таким образом, противоречие предстает здесь в «растянутом» виде: одна противоположность — на одном «конце», другая — на другом. Все промежуточные стадии, хотя их при бесконечном числе элементов данного множества может быть тоже бесконечное число, охватываются одним частным суждением: или утвердительным, или отрицательным.

Объективная основа этого отношения заключается в том, что контрарные высказывания — это крайние точки «распространенности» какого-то свойства на данном множестве, когда оно или охватывает все, или совсем отсутствует. Частноутвердительные и частноотрицательные высказывания охватывают все промежуточные случаи, когда одна часть множества обладает данным свойством, а другая — не обладает.

Если берутся два противоположных единичных суждения, то, казалось бы, здесь не может быть никаких промежуточных стадий. Например: «Этот город — Казань» и «Этот город — не Казань». В самом деле, тут трудно представить себе какие-либо промежуточные стадии. Но это объясняется тем, что «признак», «свойство» здесь является именем, которое в принципе не может принадлежать явлению частично. Если же взять абстрактный признак, то он может принадлежать явлению и частично. Так, скажем, суждения: «Казань — красивый город» и «Казань — некрасивый город» контрарны тоже. Но между ними возможны различные градации, которые в формальной логике не учитываются, тогда как в действительности может оказаться, что и то и другое из двух последних суждений ложно. Аналогично все пары суждений типа: «N — добрый» и «N — недобрый»; «N — умный» и «N — неумный» могут оказаться оба ложными, так как третье тут вовсе не исключается по той причине, что эти пары суждений не охватывают всю «шкалу» выражения данного свойства.

Объективной основой такого положения является то, что свойства не разделены четко между предметами во всем своем объеме, а могут быть присущи вещам в различной степени. Четких границ между ними нет. Интенсивность их неодинакова в различных случаях. Закон же исключенного третьего предполагает, что можно всегда четко решить, присущ данный признак вещи или множеству вещей или нет. Отсюда — его слабость, несостоятельность, недостаточность. С этим связано и то, что математикам и логикам большие заботы доставляет логическое отрицание. Это закономерно, так как отрицание часто создает такого рода неопределенность, которая уводит нас в бесконечность.

То же самое обнаруживается и в законе исключенного третьего, и даже в простом отрицательном суждении, ибо, выражаясь «материально», возможности для существования того, по отношению к чему отрицается нечто определенное, какое-то совершенно ясное и четкое свойство, весьма расплывчаты и неопределенны. Вследствие этого, например, Г. Грисс писал о «безотрицательной» логике, в которой вообще не употребляется ни закон отрицания, ни знак отрицания [235, с. 204—277; 168, с. 13, 23—24]. Ван Данциг выдвинул в 1947 г. конструкцию «утвердительной» математики (аффирмативной) [157, с. 1092—1103; 168, с. 23]. Но и эта логика, и «безотрицательная» логика Грисса, хотя они и различны до некоторой степени [178, с. 1130], обе являются определенным развитием интуиционизма. Бернайс писал, по свидетельству П. Гилмора, что более естественно было бы признавать «аффирмативную» математику ван Данцига безотрицательной интуиционистской математикой, а безотрицательную интуиционистскую математику Грисса — аффирмативной математикой, так как программа ван Данцига признает отказ от отрицания, дизъюнкции и неограниченных суждений существования, в то время как программа Грисса признает полный отказ от отрицания. Что же касается отрицания, то Грисс и ван Данциг согласны между собой в этом, так как оба придерживаются мнения, что теоремы, выражающиеся с помощью отрицания, могут быть переведены в позитивную форму; теоремы, которые не могут быть переведены, должны быть отклонены [168, с. 23].

Ничего нового такая логика не прибавляет к пониманию бесконечности. Это видно хотя бы из упомянутой статьи Грисса, в которой он для «конструирования» бесконечности использует все ту же математическую индукцию и рассматривает только счетную бесконечность [179, с. 459; 180, с. 193—198]. Да и Генцен всячески ограничивает и оговаривает условия, при которых отрицание не становится «трансфинитным» [165, с. 212]. Отрицание затрагивает интересы «финитистов», так как оно в самом деле уводит в бесконечность. Ведь если речь идет об отрицании какого-то определенного свойства по отношению к какой-то определенной, ограниченной совокупности объектов, то остается такая неопределенность: во-первых, относительно того, какое же свойство из бесконечного их числа относится к данной ограниченной совокупности, если не это; во-вторых, если выделенное свойство принадлежит не данной совокупности, при дизъюнкции, то другой. Но она не определена по объему и фактически оказывается бесконечной.

Таким образом, дизъюнкция и отрицание могут быть не трансфинитными только тогда, когда области их приложения четко очерчены, являются конечными и определенными. Лишь в таком случае ни отрицание, ни дизъюнкция не уводят нас в бесконечность и не приводят к столь нежелательным для математиков противоречиям. Здесь происходит конкретизация логики, переход от неопределенной абстрактности, охватывающей бесконечность, к очерченности и конечности. Это дает бо́льшую, чем раньше, конструктивность формальной логике, но осуществляется за счет ее широты, общности. Логика становится несколько «эмпирической». Ведь целью ее теперь оказывается исследование не общих законов процесса рассуждения, а частных приемов установления истин в отдельных, пусть и типовых, случаях. Общая теория распадается на совокупность отдельных приемов, алгоритмов. Это попытка решения сложной, общей логической проблемы, более того, философской проблемы, в частных рамках отдельных проблем. Не осознавая диалектической сущности и философской масштабности проблемы, нередко как бы ставят отдельные заплаты на широкое полотно логики и философии, тогда как нужно сменить всю ткань в целом.

Закон исключенного третьего связан с законом противоречия, как бы являясь другой его стороной. Разумеется, этот закон также предполагает, во-первых, что по крайней мере в процессе рассуждения предметы не меняют своих признаков, и, во-вторых, что противоположные признаки никогда не совмещаются: так как это создавало бы постоянную третью возможность, а о ней говорится, что она «не дана». Следовательно, и закон тождества, и закон противоречия пересекаются с законом исключенного третьего. Отсюда, если отрицают один из них, то другие не могут оставаться в неприкосновенности, тем более что Брауэр и вообще интуиционисты выступали против закона исключенного третьего не только и не столько потому, что нет будто бы возможности проверить «взаимоисключающие» признаки на бесконечном множестве элементов, сколько потому, что в процессе рассуждений о бесконечном множестве происходят неизбежно изменения с самими понятиями, участвующими в рассуждениях.

Следовательно, в частичном отрицании или изменении законов традиционной логики нет смысла.

Часто пишут, что законы традиционной логики способствуют четкости, последовательности мышления и не препятствуют познанию противоречий и развития, поскольку законы запрещают изменения и противоречия лишь в одно и то же время, в одном и том же отношении, на протяжении данного рассуждения. Это все; конечно, верно, и отсюда следует, что эти законы действительно могут не мешать диалектическому мышлению. Но лишь до тех пор, пока развитие, изменение, а значит, и противоречия не врываются в самый процесс рассуждения.

В теории же множеств при известных ситуациях, как мы видели, получается так, что сам процесс рассуждения с необходимостью вызывает изменения в объеме или содержании понятий. При этом никак невозможно абстрагироваться от изменения, движения, развития, так как оно врывается в содержание самих рассуждений. Но раз создается такое положение, то ни один из трех рассмотренных законов логики не может быть сохранен как действующий, ибо все они предполагают «охрану» именно постоянства объема и содержания понятий. Фактически традиционная логика никакого настоящего существенного движения познания в процессе логического рассуждения не предполагает. В понятиях и суждениях исключают фактор времени или, если предполагают его, то разные его моменты рассматриваются вне связи один с другим. И в том, и в другом случаях не только противоположности, если они имеются, но даже и просто различные моменты развития оказываются «разведенными», нигде не сталкивающимися. Никаких переходов от одного качества к другому, от одного содержания к другому, тем более от одной противоположности к другой, или еще менее — их синтезирования в диалектическом единстве — нет.

КОНТИНУУМ-ГИПОТЕЗА

Необходимость переходов от одной противоположности к другой и их совмещения обнаруживается в науке все чаще и чаще. В частности, это видно на истории континуум-гипотезы Кантора. Известно, что в 1884 г. Г. Кантор выдвинул еще одну проблему: так называемую континуум-гипотезу. Она заключается в предположении, что не существует такого множества, мощность которого больше мощности счетного множества, но меньше мощности континуума [231, с. 82—85; 103, с. 16—17; 105, с. 316; 127, с. 167—169]. В связи с этой гипотезой пришлось много размышлять над соотношением счетной и несчетной мощностей, о возможности мощности, промежуточной между ними или большей, чем мощность континуума.

В частности, К. Гёдель много писал об этой проблеме. В 1940 г. он опубликовал доказательство непротиворечивости *К*-гипотезы [104, с. 346—352; 115, с. 96—149]. В 1963—1964 гг. американский математик П. Дж. Коэн доказал, что отрицание *К*-гипотезы также не противоречит теории множеств, т. е. показал независимость *К*-гипотезы [103, с. 16; 65, с. 142—155; 55]. Иначе говоря, Гёдель доказал, что континуум-гипотезу нельзя опровергнуть, а Коэн — что ее нельзя и доказать.

Такова история этой знаменитой проблемы в кратком виде. Но вокруг нее возникал целый ряд вопросов, связанных с бесконечностью и логикой. Содержание понятия бесконечности обогатилось, так как в течение почти ста лет было высказано много всяких соображений по поводу возможности существования качественно различных мощностей бесконечных множеств, кроме счетной и несчетной. Так, например, Лузин и Серпинский по-разному анализировали возможность существования мощности большей, чем мощность континуума. Сама эта возможность вытекает из известной теоремы Кантора о том, что мощность множества всех подмножеств множества *A* всегда больше мощности самого множества *A*. Но множество подмножеств множества действительных чисел оказывается более мощным, чем мощность континуума, так как мощность множества всех действительных чисел равна континууму. Правда, такие множества можно допустить только абстрактно, а с точки зрения конструктивности — нельзя, ибо нам неизвестен способ их образования. Однако Кантор не был конструктивистом и обобщил *К*-гипотезу на основе идеи промежуточных множеств следующим образом. Не может быть такого множества, мощность которого больше, чем мощность множества *A*, но меньше мощности множества всех подмножеств множества *A*. Это и есть «обобщенная континуум-гипотеза». Гёдель доказал непротиворечивость именно этой обобщенной *К*-гипотезы по отношению к аксиомам теории множеств, если они сами доказаны как непротиворечивые. *К*-гипотеза оказывается частным случаем обобщенной *К*-гипотезы, так как доказано, что множество подмножеств всех натуральных чисел имеет мощность континуума [231, с. 84—85]. Иное выражение *К*-гипотезы заключается в том, что всякое несчетное точечное множество имеет мощность континуума [127, с. 167]. Это само по себе парадоксально и вызвало к жизни «кривую Пеано» и теорему Кантора об эквивалентности континуумов разного числа измерений с последующим ее развитием другими математиками, о чем уже было сказано. Было показано явление качественного различия континуума прямой, площади и объема. Но самое главное для нас — это возникновение парадоксальной ситуации, когда одно и то же положение не может быть ни доказано, ни опровергнуто.

Некоторые математики и философы считают, что положение в теории множеств после открытия Коэна стало аналогичным тому, которое было в геометрии после открытия Лобачевского о независимости пятого постулата Евклида. Так думают, например, А. Мостовский и С. Кёрнер [207, с. 113—114, 118—120]. Гёдель также писал в 1947 г., что если будет доказана независимость *К*-гипотезы, то «вопрос об ее истинности потеряет свое значение, точно так же, как истина пятого постулата Евклида стала бессмысленна для математиков с доказательством непротиворечивости неевклидовой геометрии» [169, с. 270]. Если принять *К*-гипотезу, то получается одна теория множеств, «канторова», а если ее не принимать, то будет другая теория множеств, «неканторова» [104, с. 352].

На интернациональном коллоквиуме по философии науки, который происходил в июле 1965 г. в Лондоне, были высказаны различные мнения по вопросу о значении открытия П. Коэна. П. Бернайс, например, считает, что доказательство Коэна о независимости *К*-гипотезы относится только к аксиоматической теории множеств, но не относится к формализованной [207, с. 109—112]. А. Мостовский высказал предположение, что может быть несколько теорий множеств, в зависимости от того, включается или не включается в них *К*-гипотеза. Но другие математики считают это невозможным потому, что тогда в каждом случае было бы иное обоснование математики, поскольку именно теория множеств служит им. А. Мостовский в связи с этим в 1964 г. писал, что понятие множества оказалось гораздо сложнее, чем думали раньше [74, с. 139]. Он остается при том мнении, что положение в теории множеств после доказательств Гёделя и Коэна о непротиворечивости и независимости континуум-гипотезы является аналогичным положению в геометрии после открытия Лобачевского. С его точки зрения, возможны различные теории множеств, с разными системами аксиом. Но если это так, то оказывается, что в основе математики лежат по крайней мере две теории. Причем они не только различны, но даже и противоречивы, поскольку в одной из них утверждается континуум-гипотеза, а в другой — отрицается. Получается как будто бы совмещение противоположностей. Правда, они были бы «разведены» по разным теориям, как и в геометрии,— евклидовой и неевклидовой,— если бы была создана новая теория множеств.

Она еще не создана. Но в случае ее создания положение в математике, вероятно, будет существенно отличаться от того, которое было в геометрии, когда создали неевклидовы геометрии. Это объясняется тем, что геометрия Евклида не лежала в основе математики как ее логический фундамент, к которому все сводится. Теория же множеств заняла, несмотря на парадоксы, именно такое место в математике. Следовательно, наличие двух теорий множеств, да еще с противоположными суждениями, создает раздвоение самого фундамента математики на логически несовместимые «части».

Ничего страшного тут не происходило бы с точки зрения традиционной логики, если бы существовало чисто внешнее и формальное противоречие между той теорией, в которой принимается определенное положение (постулат, гипотеза), и той, в которой оно отвергается. Тогда вовсе не было бы такого противоречия, что одно и то же предложение принимается то за истинное, то за ложное. Оно просто или включалось бы как истинное, или о нем вообще не было бы речи. Тогда полная теория, включающая данное положение, включала бы в себя, как частный случай, менее полную теорию. Такое соотношение встречается часто в науке, в том числе и в математике.

Так, теория, включающая положение только о целых числах, менее полна, чем арифметика, включающая в себя также и дроби и т. д. Более полная, более развитая теория в таких случаях не является противоречащей предыдущей теории. Ведь ранее могли вообще не предполагать о существовании тех объектов и их свойств, познание которых создало новую теорию. Вследствие незнания объекта не могло быть и его отрицания. Правда, можно было косвенно отрицать его, утверждая единственность других объектов и свойств, наряду с которыми на самом деле существует и еще непознанное. Но в таком случае опять-таки не получается противоречий при обнаружении нового, так как происходит простое расширение прежнего предмета, содержания теории. Новое прибавление не вызывает «логических потрясений», поскольку прибавляемое не противоречит прежнему содержанию. Ошибка заключалась только в том, что ошибочно расширяли объем прежних свойств. Таким, например, было утверждение, что существуют только целые числа, и все отношения можно выразить в них; или что любые отношения в природе всегда есть выражение механических закономерностей. Как известно, установилось некоторое философски критическое положение, когда обнаружилось, что такой всеобщности и абсолютности нет в названных математическом и философском утверждениях. Однако так как положения об их всеобщности были просто ложны, то противоречие между ними и новыми истинами существовало лишь вследствие неправильного понимания их места и значения. Устранялось оно «автоматически» тем, что были осознаны истинные значение и объем абсолютизируемых ранее положений. Следовательно, здесь и было внешнее выражение противоречия в форме: «существует только такая форма отношений, закономерностей» и «существует не только такая форма...». Однако дальше все происходило по законам формальной логики, так как одно из этих суждений было отброшено. Таким образом, соблюдался и закон противоречия, и закон исключенного третьего.

Другое дело, когда из двух создавшихся противоположных суждений оба являются истинными. Тогда, даже если противоположные суждения находятся в различных теориях, это не спасает дела: ведь в отношении истинности-ложности они все равно должны быть приведены «к общему знаменателю». При этом получается, что оба противоположных утверждения истинны. Произошло совмещение противоположностей. Общая математическая теория, рассматривающая обе «частичные» теории, должна как-то объяснять такое совмещение противоположностей, происходящее на фоне признания абсолютным критерия непротиворечивости. Однако этого не происходит ни по поводу евклидовой и неевклидовой геометрий, вернее — утверждения и отрицания аксиомы параллельности;

ний по поводу утверждения и отрицания *К*-гипотезы. Объясняется это тем, что математики избегают признания противоположности геометрий и говорят только о «различных» геометриях. Точно так же говорят и по поводу возможных «различных» теорий множеств, хотя на самом деле противопоставляются не «различные», а противоположные суждения, и от этого уйти нельзя. Нельзя считать, что противоположные, взаимоисключающие теории не составляют с точки зрения формальной логики противоречия на том основании, что они находятся в различных аксиоматических системах, ибо мы должны как-то объяснить соотношение этих систем. Называя такие теории, которые являются обе истинными, но в то же время логически несовместимыми, «альтернативными», С. Петров пишет: «Ссылки на обособленность альтернативных теорий в условиях, когда их объекты только приблизительно и часто только условно разделены, и при наличии некоторой промежуточной области, на которую могут претендовать обе взаимоисключающие теории,— приятная иллюзия» [88, с. 116—117; см. также 87, с. 330—331].

Излагая точку зрения Н. И. Лобачевского и соглашаясь с ним, С. А. Яновская также высказывает мысль о противоположности геометрии Евклида и Лобачевского. Лобачевский имел перед собой только два возможных положения: а) сумма углов треугольника равна двум прямым и б) она меньше двух прямых. «Исходя из противоположения этих двух возможностей,— пишет С. А. Яновская,— Лобачевский пришел к их единству, обнаружив, что геометрия Евклида является предельным случаем его неевклидовой геометрии» [125, с. 128]. Этот путь развития С. А. Яновская считает диалектическим [125, с. 127].

Как парадоксальное положение с евклидовой и неевклидовой геометриями оценивает и Л. Я. Станис. «К апориям Зенона, антиномиям Канта и т. п. прибавились идеи неевклидовой (парадоксальной) геометрии»,— пишет она [117, с. 14; см. также 106, с. 330—339], отмечая далее, что, как и две упомянутые системы противоречий, неевклидова геометрия положила начало «логико-теоретической доказательности парадоксальных исключающих друг друга принципов» [117, с. 14]. Но это замечание философов. Математики же чаще всего избегают признания того, что и неевклидовы геометрии, и предположение некanторовых теорий множеств, без *К*-гипотезы, вносят в математику противоречивость. На самом же деле противоречие с законами формальной логики получается и в том случае, когда речь идет о соотношении евклидовой геометрии с одной только геометрией Лобачевского, и тогда, когда евклидову геометрию соотносят со всеми геометриями, отрицающими постулат о параллельных. Ведь в любом из этих случаев получается противоречие между двумя указанными выше положениями Лобачевского.

Итак, сущность парадоксального положения с *К*-гипотезой заключается в том,— если понимать ее правильно, без формально-логических шор — что противоположности объективных диалектических противоречий познаются или одновременно, или «по очереди». И в том, и в другом случае они должны быть «совмещены» в одной или узкой, или широкой теории. Но при этом могут нарушаться законы традиционной логики. Анализ взаимозависимости этих законов показывает, что обойтись каким-то частичным их исключением, «урезываниями», нельзя. Следовательно, нужно в целом менять существовавшие до сих пор логические принципы. Очевидно, нужно каким-то образом вводить принцип развития и диалектической противоречивости внутрь логики. Действующие теперь логические законы при этом, разумеется, существенно изменятся. Во-первых, иным будет представление о полноте теории, так как по-настоящему диалектически она возможна только тогда, когда обе противоположности, лежащие в сущности, уже присутствуют в содержании теории или суждения. Сложность заключается в том, что это будет как-то отражаться и в форме теории, суждения.

Во-вторых, существенно изменится закон соотношения объема и содержания понятий. Ведь когда совмещаются два противоположных суждения, соответственно — свойства, тогда вместе с расширением содержания данного понятия происходит и увеличение объема. По законам же традиционной логики отношение между объемом и содержанием понятия должно быть обратным: чем шире становится объем, тем у́же должно быть содержание, и наоборот. Но с пятым постулатом Евклида и с *К*-гипотезой так не получается. В случае совмещения пятого постулата Евклида с положением Лобачевского о параллельных одновременно и расширялся объем, и обогащалось содержание понятия геометрии. В случае с совмещением утверждения *К*-гипотезы и ее отрицания обогащается содержание и одновременно увеличивается объем теории множеств, особенно понятия бесконечности.

Закон «обратно пропорциональной» связи объема и содержания часто не соблюдается уже тогда, когда в содержании понятия появляется новый признак. Объем при этом остается прежним. Следовательно, формальная логика не предполагает даже простейшего развития знания [54, с. 280—283]. Однако развитие знания происходит, и приходится или как-то ущемлять законы традиционной логики, как это делают интуиционисты различных оттенков, или делать вид, что законы соблюдаются, обманывая себя. Иначе кризис логики дает себя знать в явном виде. Особенно трудно, как уже говорилось, приходится приверженцам традиционной логики тогда, когда они вынуждены «сводить» положения, которые так или иначе являются противоположными. Это происходит в истории науки довольно часто, но с помощью того или иного способа ученым удавалось на протяжении веков закрывать на это глаза.

Одним из излюбленных приемов, как уже говорилось, является признание того, что новая теория обнимает собой старую как частный случай. Такое отношение на самом деле имеет место. Но если рассмотреть это соотношение детально, то получается следующее. Одна теория включает другую потому, что в ней отражается более общее свойство или общий закон. Тут по видимости нет противоречия между теориями или положениями. Но это только по видимости. На самом же деле все-таки получается, что общая теория противоречит своему частному случаю, ибо они отрицают друг друга по закону исключенного третьего. Они противоположны уже как общее и частное, как целое, всеобщее и отдельное проявление этого целого, всеобщего. Однако это противоречие не замечают, потому что не анализируют соотношение между общей и частной теориями по содержанию и объему. Оно не остается в рамках законов традиционной логики, так как новая теория обнимает собой и новые свойства, и старые, известные ранее, т. е. оказывается богаче по содержанию. Однако в то же время новая теория является более широкой по объему, так как она охватывает не только те предметы, к которым всегда относилась прежняя теория, но и множество новых объектов. Получается ситуация типа взаимоотношений неканторовых теорий множеств и канторовой. Но здесь положение осложняется, так как две теории или два положения науки отражают две противоположные стороны одного и того же противоречия.

Следовательно, развитие науки, в частности математики, особенно теории множеств с ее парадоксами и открытиями, связанными с *К*-гипотезой, говорит о том, что назрел вопрос о введении в логику принципа развития. Различные логические ухищрения, опирающиеся на традиционную логику или даже на современную математическую логику, не приводят к разрешению парадоксов. Необходим принципиально новый подход к логике.

ЧЕРЕЗ ПАРАДОКСЫ — К ДИАЛЕКТИКЕ

История попыток разрешения парадоксов теории множеств приводит к выводу, что, хотя и было достигнуто много побочных положительных результатов в процессе анализа парадоксов, главная цель не была достигнута: они не были разрешены. Это признают и сами математики. Например, Р. Курант в статье, вышедшей в 1964 г., писал: «...При дальнейшем развитии теории множеств появились существенные трудности, не преодоленные полностью до сих пор» [66, с. 7]. Американский математик Ф. Дж. Дейвис в том же году отмечал: «Смелая идея о бесконечности открывала широкие возможности в математике, но она в то же время приводила к парадоксам. Смысл занятия бесконечности и по сей день раскрыт не до конца» [66, с. 30]. А. Гейтинг, имея в виду логицизм, формализм и интуиционизм, сказал в 1960 г.: «Ни одно из направлений теперь не претендует на право представлять единственно верную математику» [29, с. 225]. Х. Карри в 1963 г. писал: «...Проблема объяснения парадоксов по-прежнему открыта и по-прежнему важна» [46, с. 26]. Для объяснения парадоксов, по его мнению, необходима «полная реформа логики» [46, с. 26]. Но, как видно из дальнейшего, он не понимает до конца глубины этой необходимой реформы. Это характерно и для ряда других математиков, занимающихся вопросами обоснования теории множеств.

Однако логика развития науки в целом и в частности математики требует признания диалектического материализма, к чему математиков стихийно влекут настоятельные задачи их науки. «...Важнейшие конкретные результаты, содержащиеся в трудах таких видных ученых, как Д. Гильберт, Л. Брауэр, К. Гёдель, А. Черч, Б. Рассел и другие, всегда оказываются основанными на таких идеях, которые являются — пусть даже вопреки желаниям авторов — диалектико-материалистическими по существу»,— писала С. А. Яновская [125, с. 210]. Можно сказать, что в математике происходит тот же процесс рождения диалектического материализма, о котором — по отношению к физике — говорил еще В. И. Ленин [6, с. 332]. Можно также вспомнить слова Ф. Энгельса о том, что путаница и разброд в головах естествоиспытателей есть результат влияния идеализма, избавление от которого требует признания, понимания диалектики. «Нельзя теперь взять в руки почти ни одной теоретической книги по естествознанию, не получив из чтения ее такого впечатления, что сами естествоиспытатели чувствуют, как сильно над ними господствует этот разброд и эта путаница, и что имеющая ныне хождение, с позволения сказать, философия не дает абсолютно никакого выхода. И здесь действительно нет никакого другого выхода, никакой другой возможности добиться ясности, кроме возврата в той или иной форме от метафизического мышления к диалектическому» [2а, с. 368—369].

Современные математики неудержимо влекутся к диалектическому материализму, несмотря на отсутствие у них достаточного его понимания, так как многочисленные попытки разрешить кризисное положение, оставаясь на старых философских позициях, все чаще терпят крах. Потому-то в наше время и встречаются вынужденные высказывания относительно необходимости принять диалектический материализм. Например, известный современный голландский математик Э. Бет пишет: «...Мы должны принять некоторую версию материализма, и мы можем сохранить все, что есть плодотворного в диалектическом материализме, освобожденном от его иррациональных (! — *И. Б.*) элементов» [129, с. 622].

Можно сказать, что другие ученые из несоциалистических стран, подобно Бету, стали также возлагать надежды на диалектический материализм и приближаться к признанию диалектических противоречий. «...Даже те естествоиспытатели, которые далеки от сознательного восприятия материалистической диалектики,— пишет М. М. Розенталь,— под давлением исследуемых фактов вплотную подходят к осознанию характера диалектических противоречий» [99, с. 45].

Очевидно, естественно, что через логику легче перейти к диалектике. Например, у известного логика Хао Вана теперь уже встречаются высказывания, обнаруживающие понимание как того, что нужно отличать противоречия от логической путаницы, так и того, что, пожалуй, не стоит проявлять большой страх перед противоречиями, ибо они могут обогащать теорию. Однако противоречий все-таки боятся. «Противоречивая теория бесполезна»,— высказывает укоренившееся отношение к противоречиям X. Карри [46, с. 81]. Хао Ван пишет: «Хотя противоречия часто интересны, однако никто, пока его целью не является эксперимент с противоречиями, не рекомендовал метода на том основании, что он достаточно силен, чтобы давать противоречия» [23, с. 332]. У этого автора даже есть намек на мысль о преимуществе практического критерия истинности перед критерием непротиворечивости, когда он говорит, что, например, дифференциальное и интегральное исчисление, опирающееся на противоречивую теорию множеств, применяется при строительстве мостов, которые при этом не рушатся [23, с. 333—334]. Он склонен больше доверять «живой и развивающейся математике», чем формальной системе, в которую она облекается, обнаруживая при этом противоречия. «Практически,— справедливо считает Хао Ван,— ни одна из важных математических теорий и ни одно из важных математических доказательств не были удалены из анализа вследствие противоречий теории множеств...» [23, с. 331]. Хао Ван категорически утверждает, что традиционная логика только мешает математике, и это справедливо [23, с. 318].

Иногда считают, что практически парадоксы мало мешают математике. Так, А. Френкель и И. Бар-Хиллел пишут: «Верно, что область собственно математических рассуждений как в анализе, так и в геометрии не затрагивается непосредственно действием антиномий. Антиномии возникают главным образом в области крайних обобщений, за пределами фактического применения понятий геометрии и анализа» [119, с. 14]. Как видим, они хотят «разделить сферы» в математике: в одной будут «чисто» математические понятия, а в другой — общие понятия, в которых противоречия их беспокоят гораздо меньше. Целью интуиционизма с его конструктивным методом было тоже, по словам А. Гейтинга, отделить математику от философии. Он писал в 1960 г., что интуиционисты (которых он называл здесь конструктивистами) избегают такой терминологии, которая бы внушала «мысль о математической реальности, независимо от нашего сознания» [181, с. 177]. Объясняется это тем, что такая мысль является философской, а это неприемлемо, по его мнению, для математики. «Гипотеза такой математической реальности,— продолжал он,— является по природе метафизической; целью конструктивистов является освободить математику от такой философской гипотезы» [181, с. 177].

Можно подумать, что философия способна наносить математике вред. Но на самом деле положение совершенно обратное, особенно сейчас, когда философия дает науке последовательно диалектический метод. Надо полагать, что советские математики давно признали преимущества диалектического мышления [12, с. 24—30]. Затруднение лишь в том, что конкретизация диалектической логики и тем самым прямое проникновение ее в содержание математики — процесс сложный и, очевидно, долгий. Кроме того, тут еще действует некоторая разобщенность между математикой и философией, которая осложняет положение.

Необходимость признания противоречивости бесконечности подозревали многие математики и философы прошлого. Но ясно увидели это и обосновали только классики марксизма. Так, Энгельс, критикуя Е. Дюринга за «мыслимую без противоречий» бесконечность, указывал, что противоречивость неотделима от бесконечности. «Именно *потому*,— писал он,— что бесконечность есть противоречие, она представляет собой бесконечный, без конца развертывающийся во времени и пространстве процесс. Уничтожение этого противоречия было бы концом бесконечности» [2, с. 51].

Ф. Энгельс неоднократно подчеркивал, что математическая бесконечность есть отражение объективно существующих свойств, а не «голая» математическая абстракция. «Математическое бесконечное,— писал он в «Диалектике природы»,— заимствовано из действительности, хотя и бессознательным образом, и поэтому оно может быть объяснено только из действительности, а не из самого себя, не из математической абстракции» [2а, с. 586]. Об объективности бесконечности писал, критикуя махистов, и В. И. Ленин [см. 6, с. 277]. Мы должны исходить из того, что бесконечность — не пустая абстракция, а отражение объективной существующей бесконечности, противоречия которой — не плод заблуждения математиков, а отражение реально, объективно существующего единства противоположных свойств, сторон, тенденций материального мира и являются там движущей силой.

Ф. Энгельс считал, что тогда и только тогда, когда в математике был введен принцип развития, распространенный до бесконечно малого и бесконечно большого, она по-настоящему начала делать успехи. Но именно тут ее ждали заблуждения, неуверенность в доказательствах или даже полное отсутствие обоснования,— например, дифференциального и интегрального исчислений. «Когда в математику были введены переменные величины,— писал Энгельс,— и когда их изменяемость была распространена до бесконечно малого и бесконечно большого,— тогда и математика, вообще столь строго нравственная, совершила грехопадение: она вкусила от яблока познания, и это открыло ей путь к гигантским успехам, но вместе с тем и к заблуждениям. Девственное состояние абсолютной значимости, неопровержимой доказанности всего математического навсегда ушло в прошлое; наступила эра разногласий...» [2, с. 88—89].

Несмотря на то, что Энгельс имел здесь в виду кризис оснований математики, связанный с открытием дифференциального и интегрального исчислений, его высказывание можно отнести и к положению в математике XX в. Сущность теперешнего кризиса в математике в общем аналогична сущности «математического» кризиса в XVII в. И там, и здесь сам математический материал настоятельно требует материалистического и диалектичекого истолкования. В «Математических рукописях» К. Маркс дал нам образец такого истолкования. Он показал,— и это было решением центральной проблемы в обосновании исчисления бесконечно малых,— что нуль в нем является не абстрактным «ничто», а каждый раз — конкретным отрицанием *данного* процесса, определяемого *данной* функцией [1, с. 29—45, 63].

Но кризис в обосновании математики в XX в. заключается не только в том, что требуется осмыслить объективное содержание парадоксальных положений, полученных из теории множеств. Он более глубок, чем прежние кризисы, так как требует в целом изменения отношения к противоречиям, парадоксам. Поскольку же изменение отношения к противоречиям затрагивает самую основу прежней логики, то требуется изменить и ее законы.

На наш взгляд, для «разрешения» парадоксов бесконечности необходимо, во-первых, признать, что противоречия в связи с понятием, проблемой бесконечности неизбежны и в принципе неуничтожимы, как всякие диалектические противоречия. Во-вторых, нужно дополнить законы и правила существующей логики так, чтобы они допускали — при определенных условиях — диалектические противоречия в рассуждениях. Для этого, в-третьих, необходимо по крайней мере иметь определенный критерий — не только практический, но и логический — для отличения диалектических противоречий от формально-логических, свидетельствующих лишь о непоследовательности мышления, о заблуждении. В связи с этим возникает, во-первых, вопрос о том, какие диалектико-логические правила нужно и можно ввести так, чтобы это не нарушало законов последовательного мышления, но в то же время допускало развитие понятий, их изменение и единство противоположностей. Во-вторых, из основной проблемы о введении в логику рассуждения диалектических принципов вытекает вопрос о том, каково будет соотношение такой новой логики с теперешними логиками.

Основным является признание и принятие не на словах, а на деле противоречия как принципа и метода познания. Но в связи с этим и возникает вопрос о критерии диалектичности противоречий, ибо не всякие противоречия являются диалектическими. Известно, что по этому вопросу с давних пор ведутся дискуссии [92, с. 40—80, 327—345; 118, с. 5—41; 43, с. 5—20; 58, гл. 3, 4, 7; 47; 121; 59, гл. 5—6; 87; 125, с. 199—234].

С. Петров поставил вопрос о различении диалектических противоречий и логических ошибок-противоречий более конкретно, чем другие авторы [88]. Он излагает проблему противоречия в науке как гипотезу, или «тезис» Гегеля о неуниверсальности логического закона противоречия, и в онтологическом, и в гносеологическом планах. В аргументации этого тезиса С. Петровым нас интересует сейчас вывод о возможном критерии диалектических противоречий. Рассмотрев некоторые типичные способы «разрешения» крупных антиномий, С. Петров делает вывод, что они связаны с определенным ущербом для тех теорий, в которых были применены, и страдают искусственностью. Так, обычные логические ошибки устраняются без особых, специальных «чистых конструктов», тогда как классические антиномии (в частности — в дифференциальном исчислении) разрешаются только с применением особых, специальных построений [88, с. 110—112]. Часто для разрешения парадоксов — например, теории множеств — не существует «локальных» методов. Здесь приходится затрагивать многие существенные соседние теории и жертвовать ими, хотя они являются непротиворечивыми. «*Нелокальные решения*,— пишет Петров,— *похожи больше на насильственное устранение истин, чем на вскрытие ошибок*» [88, с. 113]. Нелокальные решения могут приводить к неполноте научной теории. Так было в квантовой механике, очевидно и вообще легко обнаруживается в неформальных науках, где сразу бросается в глаза «насильственность» нелокального метода. Наконец, последнее, из чего исходит С. Петров при выводе критерия диалектичности противоречий, это наличие в науке к настоящему времени ряда пар таких теорий, которые внутри себя непротиворечивы, но одна по отношению к другой является противоположной, несовместимой.

О таких явлениях в науке уже шла речь. Это явление С. Петров называет «существованием альтернативных теорий» [88, с. 116—117].

Из этого изложения автор делает вывод о возможности считать диалектическими те противоречия, при устранении которых из теории науке наносится существенный ущерб. Этот вывод подтверждается и тем, что устранение обычных логических ошибок-противоречий никогда не имеет подобных отрицательных последствий, т. е. не отражается «неблагоприятно на адекватности и полноте знаний» [88, с. 117].

Конкретность и глубина мысли С. Петрова несомненна. Но его критерий диалектичности является, во-первых, негативным в том смысле, что он основан на выявлении отрицательных последствий попыток разрешения антиномий. Кроме того, он требует *совершения* этих попыток разрешения и *до* них не может дать способа определения диалектических противоречий. Наконец, он является косвенным, а не прямым методом различения формальных и диалектических противоречий.

Л. Я. Станис в своей работе выделяет такой признак диалектичности характера парадоксов, как их неуничтожимость [106, с. 331]. Действительно, если обычные логические противоречия-заблуждения могут быть устранены, то парадоксы как диалектические противоречия «неистребимы». Однако «неуничтожимость» — тоже косвенный критерий диалектичности, так как возможен для применения лишь после какого-то числа попыток его устранения. Требуется же такой критерий, который давал бы возможность прямо и сразу, до начала процесса «разрешения» или устранения парадоксов определить их природу. Таким критерием можно считать практическое применение противоречивой теории. Но для математики практика является тоже косвенным способом проверки, а часто даже и недоступным в данный момент, так как применение данной математической теории — не только прямое, но и косвенное, через другие теории, воплощаемые в практической деятельности,— может быть еще неизвестно. Для неформальных наук, тем более эмпирических, критерий практики сохраняет свое значение и для определения характера противоречивости. Но для формальных теорий и наук необходимо иметь позитивный и прямой критерий диалектичности противоречий.

На наш взгляд, для определения характера противоречий в теории необходимо знать, в результате *чего* они образовываются. Результатом чего являются формально-логические противоречия и в чем их сущность — это известно. Результатом же чего являются диалектические противоречия и как они появляются в математических рассуждениях — необходимо проанализировать. В самом общем плане ясно, что диалектические противоречия в объективной реальности — это те, которые являются движущей силой ее развития. В науке же, если ее рассматривать не в историческом, а в логическом плане, диалектическими противоречиями являются те, которые отражают объективные диалектические противоречия. Но это положение дает нам непосредственно только вывод о возможности и правомерности практического критерия, который в формальных, абстрактных науках почти неприменим. Значит, для них следует конкретизировать это положение.

Если в таких науках, как, например, физика, противоречия являются обычно явным, прямым отражением объективных противоречий, то в математике дело обстоит всегда сложнее. Непосредственно они здесь обнаруживаются только как противоречия между понятиями или между словами и понятиями. Только в кругу отношений этих «объектов», т. е. понятий, слов, символов, мы можем найти противоречия. Из этого следует, что определять диалектичность противоречия здесь можно и нужно только относительно понятийного материала. Диалектика проявляется тут в изменении понятий и символов, в их взаимодействии, которые являются отражением — часто весьма косвенным — объективных противоречий. Значит, сначала следует проанализировать ход того рассуждения, которое привело к парадоксу, на предмет наличия в нем признаков изменения. Если на протяжении рассуждения строго соблюдаются правила формальной логики, но при этом меняется объем или содержание употребляемых понятий, или то и другое одновременно, то, значит, произошло изменение понятия, ведущее к парадоксу. Вопрос, таким образом, переходит к проблеме критерия изменения понятия. Это с одной стороны. С другой стороны, остается проблема критерия для отличия диалектического противоречия от случайных противоречий, путаницы в рассуждении и т. п.

Таким образом, за критерий изменения понятия можно принять изменение содержания или объема понятия, при условии строгого соблюдения законов формальной логики в процессе рассуждения. Более прямым критерием диалектичности противоречий может быть признак единства, нераздельности общей основы противоположностей в противоречии. Диалектические противоположности являются крайними точками выражения одного и того же содержания, которое имеет в себе обе эти противоположности. Но каждая из них может проявляться в каждый данный момент в большей или меньшей степени. Обе противоположности находятся всегда в единстве и взаимозависимости. Но на одном полюсе наиболее явно обнаруживается одна сторона, а на другом — противоположная ей. Следовательно, о существовании какого-то свойства как единственного, исключающего противоположное, можно говорить лишь условно. Когда же эта условность обнаруживает себя, когда единство противоположностей становится явным, тогда и обнаруживает себя диалектичность соотношения свойств. Возникают парадоксы.

В формальной логике не учитывается ряд черт, связанных с диалектичностью свойств, признаков. Но их можно игнорировать лишь до той поры, пока противоположности не столкнутся в одном понятии, суждении или рассуждении. Необходимым способом обнаружения самой возможности диалектической антиномии и установления ее закономерности является анализ степени принадлежности того или иного признака предмету рассуждения. Этот анализ должен быть анализом прослеживания всей «шкалы» степеней принадлежности признака, существования его. Следовательно, когда мы наталкиваемся на парадокс относительно какого-то свойства, то нужно, во-первых, изучить все возможные степени принадлежности этого свойства предмету. Затем следует ввести в парадоксальные суждения и понятия эту градацию, это различение. Например, в парадоксе «Лжец» ведь имеется в виду чисто формально, что все критяне — лгуны всегда и во всем. Однако на самом деле так никогда не бывает, чтобы люди абсолютно всегда только лгали. Тут следует иметь в виду, что возможны различные степени лжи, и вопрос сводится к тому, чтобы определить, лжет ли данный критянин в то самое время, когда утверждает, что все критяне — лгуны. В данной ситуации типа «лжец» ограниченность формальной, недифференцированной постановки вопроса обнаруживается очень ярко, тогда как в других случаях это скрадывается.

В некоторой степени логика Лукасевича и другие многозначные логики способствуют преодолению жесткости формализма закона исключенного третьего. Вероятно, дело следовало бы довести до выяснения двух пределов, каждый из которых был бы противоположностью другого. Все же остальные, промежуточные ступени надо рассматривать не просто как нейтральные, а как единство двух противоположных моментов. Тогда в логику войдет диалектика, и никого не будут пугать парадоксы типа расселовского. Будет ясно, что понятие правильного множества не предполагает предельного положения, когда берется в абсолютном смысле вся совокупность множеств. Это понятие специально и создано для промежуточных множеств, а для предельных ситуаций оно неприменимо. Точно так же и с парикмахером, который соотносится со множеством людей, нуждающихся в бритье, как нечто внешнее. Если же его самого включать в это множество, то нужно учитывать его особое соотношение с самим собой. В формальной логике и предполагается такое жесткое противопоставление сторон, а когда граница этого противопоставления стирается, то на помощь приходит диалектика. С ее помощью мы обнаруживаем, что одна противоположность переходит в другую, одна с другой сливается, вследствие чего первоначальная резко разграничительная постановка вопроса терпит крах. Значит, переходы одной противоположности в другую необходимо узаконить, если анализ признака произведен от одного предела до другого.

Парадоксальное положение может создаваться и тогда, когда смешиваются «гносеологические» противоположности: отражение и отражаемое. Так случается, когда одно и то же понятие рассматривается то со стороны его содержания, то со стороны его формы. Иногда такое смешение усугубляется еще и тем, что за словом могут подразумевать внешний объект. Смешение такого рода очень типично. Мы его видели в парадоксе Греллинга — Нельсона. Изменение соотношения между объектом, понятием, термином (знаком) в процессе рассуждения должно быть осознано как проявление диалектического противоречия отражения и отражаемого, а не только как формальное смешение понятий с различным содержанием. Материалистическое и диалектическое понимание такого отношения дает методологический подход к уяснению всех подобных ситуаций в процессе движения мысли.

Итак, можно и нужно оставить в действии существующие правила традиционной логики. Но для случаев, когда в рассуждении обнаруживаются парадоксы, следует применить к ним критерий диалектичности. Если нет возможности соотнести возникшее противоречие с объективными процессами, то необходимо проанализировать процесс рассуждения как процесс изменения содержания и объема понятий. Свойство же, выступающее предметом данного рассуждения, рассмотреть как изменяющееся, в различных степенях его существования и проявления в данном случае, вплоть до крайних, предельных, где обнаруживаются противоположности. Кроме того и наряду с этим необходимо проанализировать понятия, участвующие в парадоксе, на предмет того, не изменяется ли их содержание и не смешивается ли в них форма и содержание.

В этой нашей рекомендации содержится конкретизация четырех требований диалектической логики, данных В. И. Лениным в работе «Еще раз о профсоюзах...» [9, с. 290]. Сущность их сводится к тому, чтобы всегда брать предмет рассмотрения в развитии, всесторонне и в конкретной ситуации. Именно об этом и шла речь выше, ибо когда исследуют предмет таким диалектическим способом, то диалектические противоречия выявляются как закономерный признак развития, движения понятий.

Введение критерия диалектичности гносеологических противоречий может стать одним из тех шагов, которые постепенно должны сделать диалектическую логику всеобщим и обязательным способом мышления. Это будет, в частности, ответом некоторым немарксистским философам, которые считают, что законы диалектики не имеют познавательного значения, что диалектическая логика — это только умозрительная наука [5].

В связи с утверждением о возможности ввести в современную логику «принцип противоречия» остаются еще два вопроса. Во-первых, как будет соотноситься такая диалектическая «конструктивная» логика с традиционной? Во-вторых, возможно ли (и нужно ли) будет эту «логику с противоречиями» формализовать?

Мы считаем, что законы традиционной логики могут действовать беспрепятственно и как единственные до тех пор, пока не обнаружится «неистребимое» противоречие-парадокс. Тогда следует применить критерий диалектичности, и если оказывается, что противоречие «законно», т. е. является диалектическим, то остальные рассуждения строятся с учетом закономерности этого парадокса.

Положения, являющиеся в некоторой степени приближением к диалектической логике, можно найти еще у Аристотеля или по крайней мере в его времена, когда в суждения допускали фактор времени, а следовательно, и фактор деятельности, изменения. Так, Аристотелю уже был известен тот парадокс, что на вопрос, будет ли завтра сражение, нельзя ответить ни положительно, ни отрицательно [44, с. 68]. В этом зародыше временно́й логики есть связь с модальной, так как здесь включается фактор возможности, неотделимый от развития, изменения. Следовательно, не так уж нова и неожиданна диалектика в логике для ученых. Тем не менее как явный и непреложный они признают принцип непротиворечивости и не приемлют никаких посягательств на него. Но логика развивается, и мы видим многие попытки как-то включить принцип развития, изменения в существующую логику, а от принципа изменения неотделим принцип противоречия.

---

[5] Такие мнения высказывали А. Дж. Айер, К. Ясперс, М. Бунге и другие [см. «Вопросы философии», 1962, № 1, с. 96—105, а также материалы XV Международного философского конгресса].

О том, что проблема введения диалектического принципа противоречия в современную логику вполне назрела, говорят хотя бы попытки так или иначе формализовать диалектику как совокупность диалектико-логических принципов, выраженных в формулировке диалектических законов и требований диалектической логики у В. И. Ленина. Такие попытки или положительную их оценку можно встретить в некоторых работах современных авторов [87, с. 309—321; 97, с. 35—41; 149, с. 3790—3792; 189, с. 143—160; 190, с. 57—77; 89а и др.]. Не добавляя своего мнения к этим попыткам формализовать диалектику и к оценкам этих попыток, поскольку это относится уже к особому исследованию, отметим лишь, что следует остерегаться на этом пути упрощения диалектики.

Вероятно, первоначально следует добиться такого положения в науке, и в частности в математике, чтобы ученые *в принципе* признали необходимость и плодотворность введения в логику закона диалектического противоречия. По крайней мере на первых порах это можно сделать, как нам кажется, без всякой формализации. Но необходимо осуществление глубокого диалектического анализа понятий, участвующих в парадоксальной ситуации.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Маркс К.* Математические рукописи. М., 1968.
2. *Энгельс Ф.* Анти-Дюринг.— *Маркс К.* и *Энгельс Ф.* Сочинения, т. 20.

2а. *Энгельс Ф.* Диалектика природы.— *Маркс К.* и *Энгельс Ф.* Сочинения, т. 20.

3. *Энгельс Ф.* Людвиг Фейербах и конец классической немецкой философии.— *Маркс К.* и *Энгельс Ф.* Сочинения, т. 19.
4. *Энгельс Ф.* Развитие социализма от утопии к науке.— *Маркс К.* и *Энгельс Ф.* Сочинения, т. 19.
5. *Ленин В. И.* Философские тетради.— Полн. собр. соч., т. 29.
6. *Ленин В. И.* Материализм и эмпириокритицизм.— Полн. собр. соч., т. 18.
7. *Ленин В. И.* Марксизм и ревизионизм.— Полн. собр. соч., т. 17.
8. *Ленин В. И.* Еще к вопросу о реализации.— Полн. собр. соч., т. 4.
9. *Ленин В. И.* Еще раз о профсоюзах, о текущем моменте и об ошибках т. т. Троцкого и Бухарина.— Полн. собр. соч., т. 42.
10. *Абдильдин Ж. М., Нысанбаев А. Н.* Диалектико-логические принципы построения теории. Алма-Ата, 1973.
11. Автоматы. М., 1956.
12. *Александров А. Д.* Ленинская диалектика и математика.— «Вестник ЛГУ», 1950, № 4.
13. *Андреев И. Д.* Проблемы логики и методологии познания. М., 1972.
14. *Аристотель.* Метафизика. М., 1934.
15. *Асмус В. Ф.* Логика. М., 1947.
16. Бесконечность и Вселенная. М., 1969.
17. *Бирюков Б. В.* Кибернетика и методология науки. М., 1974.
18. *Бирюков Б. В.* Крушение метафизической концепции универсальной области в логике. М., 1963.
19. *Бирюков Б. В.* О работе Фреге по философским вопросам математики.— В кн.: Философские вопросы естествознания, вып. 2. М., 1959.
20. *Бирюков Б. В.* Философские вопросы логической формализации и логических средств кибернетики. Автореф. докт. дисс. М., 1965.
21. *Бродский И. Н.* Отрицательные высказывания. Л., 1973.
22. *Бурбаки Н.* Очерки по истории математики. М., 1963.
23. *Ван Хао.* Процесс и существование в математике.— В кн.: Математическая логика и ее применения. М., 1960.

24. *Ван Хао, Мак-Ноттон Р.* Аксиоматические системы множеств. М., 1963.
25. *Вейль Г.* О философии математики. М.– Л., 1934.
26. *Гайденко П. П.* Анализ математических предпосылок научного знания в неокантианстве марбургской школы.— В кн.: Концепции науки в буржуазной философии и социологии. М., 1973.
27. *Гассенди П.* Сочинения, т. 2. М., 1968.
28. *Гейтинг А.* Интуиционизм. М., 1965.
29. *Гейтинг А.* Тридцать лет спустя.— В кн.: Математическая логика и ее применения. М., 1960.
30. *Гильберт Д.* Основания геометрии. М.— Л., 1948.
31. Гносеологические проблемы формализации. Минск, 1969.
32. *Гоббс Т.* Избр. произв. М., 1965.
33. *Горский Д. П.* Вопросы абстракции и образования понятий. М., 1961.
34. *Горский Д. П.* Проблемы общей методологии наук и диалектической логики. М., 1968.
35. *Гудстейн Р. Л.* Рекурсивный математический анализ. М., 1970.
36. *Гуссерль Э.* Логические исследования, ч. 1. Спб., 1909.
37. Диалектический материализм и вопросы естествознания. М., 1964.
38. *Дюгем П.* Физическая теория. Спб., 1910.
39. Законы мышления. М., 1962.
40. Записки научных семинаров. Ленингр. отд. Математического ин-та АН СССР, т. 4, 8, 16, 20, 32 (1967–1972).
41. *Зиновьев А. А.* Основы логических теорий научных знаний. М., 1967.
42. История философии, т. I. М., 1941.
43. Историко-философские очерки. М., 1964.
44. *Караваев Э. Ф.* Время и логическая форма в античной и средневековой логике.— «Философские науки», 1973, № 6.
45. *Карнап Р.* Значение и необходимость. М., 1959.
46. Карри Х. Основания математической логики. М., 1969.
47. *Кедров Б. М.* Единство диалектики, логики и теории познания. М., 1963.
48. *Киселева Н. А.* Математика и действительность. М., 1967.
49. *Клини С. К.* Введение в метаматематику. М., 1957.
50. *Кольман Э.* Предмет и метод современной математики. М., 1936.
51. *Кольман Э.* Современная физика в поисках дальнейшей фундаментальной теории.— «Вопросы философии», 1965, № 2.
52. *Кондаков Н. И.* Введение в логику. М., 1967.
53. *Копнин П. В.* Диалектика как логика и теория познания. М., 1973.
54. *Котарбинский Т.* Избр. произв. М., 1963.
55. *Коэн П. Дж.* Теория множеств и континуум-гипотеза. М., 1969.
56. *Кутюра Л.* Философские принципы математики. Спб., 1913.
57. *Лебег А.* Интегрирование и отыскание примитивных функций. М.— Л., 1934.
58. Ленин об элементах диалектики. М., 1965.

59. Ленинская теория отражения и современность. Москва — София, 1969.
60. Логические исследования. М., 1959.
61. *Марков А. А.* О конструктивной математике.– «Труды Математического ин-та АН СССР», 1962, т. 67.
62. *Марков А. А.* О логике конструктивной математики. М., 1972.
63. *Марков А. А.* О логике конструктивной математики.— «Вестник МГУ», 1970, № 2, сер. 1.
64. *Марков А. А.* Теория алгоритмов.— «Труды Математического ин-та АН СССР», 1951, т. 38.
65. Математика. Итоги науки. 1965, т. 9, № 4.
66. Математика в современном мире. М., 1967.
67. Математическая теория логического вывода. М., 1967.
68. Математический сборник, т. 15(57), № 3. М., 1944.
69. Математический сборник, т. 32, вып. 4. М., 1925.
70. *Медведев Ф. А.* Развитие теории множеств в XIX веке. М., 1965.
71. *Мендельсон Э.* Введение в математическую логику. М., 1971.
72. *Молодший В. Н.* Очерки по философским вопросам математики. М., 1969.
73. *Молодший В. Н.* Эффективизм в математике. М., 1938.
74. *Мостовский А.* Непротиворечивост и независимост на хипотезата за континуума.— «Физико-математическо списание», 1965, т. 8(41), № 2.
75. *Мостовский А.* Современное состояние исследований по основаниям математики — УМН, 1954, т. IX, вып. 3(61).
76. *Нарский И. С.* Диалектическое противоречие и логика познания. М., 1969.
77. *Нарский И. С.* Актуальные проблемы марксистско-ленинской теории познания. М., 1966.
78. *Нарский И. С.* К вопросу об отражении диалектики движения в понятиях.– В кн.: Формальная логика и методология науки. М., 1963.
79. *Наторп П.* Кант и марбургская школа.— В кн.: Новые идеи в философии, сб. 5. Спб., 1913.
80. *Нейман Дж.* Теория самовоспроизводящихся автоматов. М., 1971.
81. *Новиков П. С.* Элементы математической логики. М., 1959.
82. Новые идеи в математике, сб. 6. Спб., 1914.
83. Новые идеи в математике, сб. 10. Пг., 1915.
84. *Нысанбаев А. Н., Шляхин Г. Г.* Развитие познания и математика. Алма-Ата, 1971.
85. *Петер Р.* Рекурсивные функции. М., 1954.
86. *Петров С.* Логическите антиномии. Формулировки.— «Философска мисъл», 1970, № 4.
87. *Петров С.* Логическите парадоксите във филосфска интерпретация. София, 1971.
88. *Петров С.* Парадоксы в философской интерпретации.— «Вопросы философии», 1972, № 1.
89. *Петров Ю. А.* Логические проблемы абстракции бесконечности и осуществимости. М., 1967.
89а. *Петров Ю. А.* Логическая функция категорий диалектики. М., 1972.

90. Применение логики в науке и технике. М., 1960.
91. Проблемы Гильберта. М., 1969.
92. Проблемы научного метода. М., 1964.
93. *Пуанкаре А.* Наука и метод. Одесса, 1910.
94. *Пуанкаре А.* Отчет о работах Д. Гильберта.— В кн.: *Гильберт Д.* Основания геометрии. Пг., 1923.
95. *Пуанкаре А.* Наука и гипотеза. М., 1904.
96. *Пуанкаре А.* Ценность науки. М., 1906.
97. *Пузиков П. Д.* О предмете диалектической логики.— «Философские науки», 1973, № 3.
98. *Радлов Э. Л.* Мистицизм в современной философии.— В кн.: Новые идеи в философии, сб. 5. Спб., 1913.
99. *Розенталь М. М.* Ленин о диалектике как теории познания.— «Коммунист», 1973, № 9.
100. *Рузавин Г. И.* О природе математического знания. М., 1968.
101. Сборник статей по философии математики. М., 1936.
102. *Свидерский В. И., Кармин А. С.* Конечное и бесконечное. М., 1966.
103. *Серпинский В. К.* О теории множеств. М., 1966.
104. *Славков С.* Континуум-хипотезата и научното знание.— В кн.: Енгелс и съвременното научно знание. София, 1971.
105. *Слупецкий Е., Борковский Л.* Элементы математической логики и теории множеств. М., 1965.
106. *Станис Л. Я.* Философско-методологические проблемы связи пространства, времени, движения материи. Докт. дисс. М., 1973.
107. *Стяжкин Н. И.* Становление идей математической логики. М., 1964.
108. *Субботин А. Л.* Традиционная и современная формальная логика. М., 1969.
109. *Тимофеев И. С.* Методологическое значение категорий «качество» и «количество», М., 1972.
110. Труды Математического ин-та АН СССР, 1951, т. 38.
111. Труды Математического ин-та АН СССР, 1954, т. 42.
112. Труды Математического ин-та АН СССР, т. 37, 38, 40, 42, 44, 51, 52, 67, 72, 93, 98, 113, 114, 121 (1951—1972).
113. Труды Международного конгресса математиков. М., 1968.
114. *Тьюринг А. М.* Может ли машина мыслить? М., 1960.
115. УМН, 1948, № 3, вып. 1(23).
116. «Учен. зап. Томского ун-та», 1964, № 52.
116а. Философия и логика. М., 1974.
116б. «Философские науки», 1974, № 6.
117. Философские проблемы естествознания. М., 1971.
118. Формы мышления. М., 1962.
119. *Френкель А., Бар-Хиллел И.* Основания теории множеств. М., 1966.
120. *Хаусдорф Ф.* Теория множеств. М.— Л., 1937.
120 а. *Цехмистро И. З.* Диалектика множественного и единого. М. 1972.
121. *Черкесов В. И.* Материалистическая диалектика как логика и теория познания. М., 1962.
122. *Черч А.* Введение в математическую логику, т. 1. М., 1960.
123. *Шанин Н. А.* О критике классической математики.— «Труды Математического ин-та АН СССР», 1962, т. 67.

124. *Шанин Н. А.* О некоторых логических проблемах арифметики.– «Труды Математического ин-та АН СССР», 1955. т. 43.
125. *Яновская С. А.* Методологические проблемы науки. М., 1972.
126. «Acta math». 1906, Bd 30.
127. *Bachmann H.* Transfinite Zahlen 1955.
128. *Bernstein T.* Über die Reihe der transfiniten Ordnungszahlen.— «Math. Ann.», 1905, Bd 60.
129. *Beth E. W.* The foundations of mathematics. Amsterdam, 1959.
130. *Borel E.* Paradoxes de la théorie des ensembles.– «Ann. scient. Ecole norm. supér.», 3 ser., 1908, v. 25.
131. *Borel E.* Leçons sur la théorie des fonctions. Paris, 1914.
132. *Borel E.* Eléments de la théorie de ensembles. Paris, 1949.
133. *Borel E.* Leçons sur la théorie de la croissance. Paris, 1910.
134. *Borel E.* Methodes et problemes de théorie des fonctions. Paris, 1950.
135. *Borel E.* Les paradoxes de l'infini. Paris, 1946.
136. *Brouwer L. E. J.* Mathematik, Wissenschaft und Sprache.— «Monatsch. Math. und Phys.», 1929, Bd 36.
137. *Brouwer L. E. J.* Over de grondslagen der wiskunde. Amsterdam — Leipzig, 1907.
138. *Brouwer L. E. J.* Zur Begründung der intuitionistischen Mathe matik.— «Math. Ann.», 1924, Bd 93; 1925, Bd 95; 1926, Bd 96.
139. *Cantor G.* Gesammelte Abhandlungen. Berlin, 1932.
140. *Cantor G.* Zur Lehre vom Transfiniten. Gesamm. Abhandl. aus «Z. Philos. und philos. Kritik», Abt. 1, 1890.
141. *Cassirer E.* Das Erkenntnisproblem in der Philosophie und Wis senschaft der neuren Zeit. Bd. IV. Stuttgart, 1957.
142. *Cassirer E.* Das Erkenntnisproblem in der Philosophie und Wissenschaft der neuren Zeit, Bd I—IV. Berin, 1906—1920.
143. *Cassirer E.* Philosophie der synthetischen Formen, Bd III. Berlin, 1929.
144. *Cassirer E.* Substanzbegriff und Funktionbegriff. Berlin, 1910.
145. *Church A.* Introduction to mathematical logic. Princeton, 1944.
146. *Church A.* An unsolvable problem of elementary number theory.— «Amer. J. Math.», 1936, v. 58.
147. *Cohen H.* Logik der reinen Erkenntnis. Berlin, 1902.
148. *Cohen H.* Das Prinzip der Infinitesimal-Methode und seine Geschichte. Berlin, 1883.
149. *Costa N. C. A. da.* Calculs propositionels pour les systémes formels inconsistans.— C. r., Acad. sci. Paris, 1963, t. 257, N 25.
150. *Couturat L.* De l'infini mathematique. Paris, 1896.
151. *Couturat L.* Les principes des mathematiques. Paris, 1905.
152. *Curry H. B.* Foundations of mathematical logic. N. Y., 1963.
153. *Curry H. B.* Combinatory logic, v. 1. Amsterdam, 1958.
154. *Dubislav W.* Die Philosophie der Mathematik in der Gegenwart. Berlin, 1932.
155. *Dubislav W.* Die sogenannten Grundlagenkriese der Mathematik.— «Unterrichtsblätter», N 5, 1931, N 5.
156. *Dantzig D. van.* Is $10^{10^{10}}$ a finite number? — «Dialectica», 1955, v. 9.
157. *Dantzig D. van.* On the prinziples of intuitionistic and affirmative mathematics, II.— «Proc. Kengr. nederl. Akad. wet.», 1947, Bd 50, N 9.
158. «Dialectica», 1956, v. 10, N 3.

159. *Frege G.* Begriffsschrift. Halle, 1879.
160. *Frege G.* Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet, Bd 2. Jena, 1902.
161. *Frege G.* Nachgelassenen Schriften, Bd 1. Hamburg, 1969.
162. *Fraenkel A.* Abstract set theorie. Amsterdam, 1966.
163. *Fraenkel A.* Zehn Vorlesungen über die Grundlegung der Mengenlehre. Leipzig — Berlin, 1927.
164. *Fraenkel A., Bar-Hillel Y.* Foundation of set theory. Amsterdam, 1958.
165. *Gentzen G.* The collected papers. Amsterdam — London, 1969.
166. *Gentzen G.* Die gegenwärtige Lage in der mathematischen Grundlagenforschung.— «Forsch. Logik und Grundlegung exacte Wiss.», 1938, N. Folge, H. 4.
167. *Gentzen G.* Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahltheorie.— «Mat. Ann.», 1936, Bd 112, H. 4.
168. *Gilmore P. C.* The effect of griss critizism of intuitionistic logic. Amsterdam, 1953.
169. *Gödel K.* What is Cantor's continuum problem? — In' *Benacerraff P.* and *Putnam H.* Philosophy of mathematics. New Jersey. 1964.
170. *Goodman N.* The structure of appearance. Cambridge, 1951.
171. *Goodman N.* A world of individuals.— In: The Problem of Universals. Notre Dame, 1956.
172. *Goodman N., Quine W. v. O.* Steps toward a constructive nominalism.— «J. Symbol. Logic», 1947, 12, N 4.
173. *Goodstein R. L.* Boolen algebra. N. Y., 1963.
174. *Goodstein R. L.* Essays in the philosophy of mathematics. Lecester, 1965.
175. *Goodstein R. L.* Recursive analysis. Amsterdam, 1961.
176. *Goodstein R. L.* Recursive number theory. Amsterdam, 1964.
177. *Grelling K., Nelson L.* Bemerkungen zu den Paradoxien von Russell und Burali-Forti.— Abhandl. Fries'schen Schule. N. Folge, 1908, Bd 2.
178. *Griss G. F. C.* Negationless intuitionistic mathematics, I.— «Proc. Nederl. Akad. wet.», 1946, Bd 49, N 10.
179. *Griss G. F. C.* Negationless intuitionistic mathematics, II.— Proc. Nederl. Akad. wet., 1950, Bd 53, N 4.
180. *Griss G. F. C.* Negationless intuitionistic mathematics, III.— «Proc. Nederl. Akad. wet.,», ser. A, 1951, bd 5, N 2.
181. *Heyting A.* Remarques sur le constructivisme.— «Logique et analyse», 1960, N 11-12.
182. *Hilbert D.* Gesammelte Abhandlungen, Bd III. Berlin, 1935.
183. *Hintikka J., Yaakko K.* Vicious circle principle and the paradoxes.— «J. Symbol. Logic», 1957, v. 22.
184. *Hobson E. W.* The theory of functions of real variable. Cambridge, 1907.
185. *Husserl E. G.* Husserliana, Bd. VI. Hague, 1954.
186. *Husserl E. G.* Husserliana, Bd. X. Haag, 1966.
187. *Husserl E. G.* Husserliana, Bd. XII. Haag, 1970.
188. International congress of Mathematicians I. Leipzig, 1898.
189. *Jaskowski St.* Propositional calculus for contradictory deductive systems.— «Studia logica», 1969, t. XXIV.
190. *Jaskowski St.* Rachunek zdan dla systemow dedukcyjnych sprzecnych.— «Studia Soc. scient. Torunensis», 1949, Sect. A., v. 1, N 2.

191. «J. Symbol. Logic», 1936, v. 1, N 1.
192. «J. Symbol. Logic», 1936, v. 1, N 3.
193. *Kolmogorow A.* Zur Deutung der intuitionistischen Logik— «Mat. Z.», 1932, Bd 35, H. 1.
194. «Math. Ann.», 1924, Bd 93.
195. «Math. Ann.», 1925, Bd 95.
196. «Math. Ann.», 1926, Bd 96.
197. *Meschkowski H.* Probleme des Unendlichen. Braunschweig, 1967.
198. *Mostowski A.* Über den Begriff einer endlichen Menge.— «J. Symbol. Logic», 1939, v. 4, N 1.
199. *Natorp P.* Logik. Marburg, 1904.
200. *Natorp P.* Die logische Grundlagen der exakten Wissenschaft. Leipzig — Berlin, 1910.
201. *Neumann J. von.* Eine Axiomatisierung der Mengenlehre.— «J. reine und angew. Math.», 1925, Bd 154, H. 4.
202. *Peano G.* Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane.— «Math. Ann.», 1890, Bd 36.
203. *Poincaré H.* Les mathématiques et la logique.— «Rev. méthaphys. et morale», 1906, an. 14.
204. *Poincaré H.* La valeur de la science, Paris, 1909.
205. *Poincaré H.* La logique de l'infini.— «Rev. méthaphys. et morale», 1909, t. XVII, N 4.
206. *Popper K.* Self-reference and meaning in ordinary language.— «Mind», 1954, v. 63, N 25.
207. Problems in the Philosophy of Mathematics, v. 1. Amsterdam, 1967.
208. Quantoren — Modalitäten — Paradoxien. Berlin, 1972.
209. *Quine W. v. O.* Ontological relativity and other essays. N. Y. — London, 1969.
210. *Quine W. v. O.* On universals.— «J. Symbol. Logic», 1947, v. 12. N 3.
211. *Quine W. v. O.* Notes on existence and necessity.— «J. Philos.», 1943, v. 40.
212. *Ramsey I.* The foundations of mathematics and other logical essays. London, 1931.
213. Rendiconti Circolo Mat. Palermo, t. 11, 1897.
214. «Rev. Méthaphys. et morale», 1905, t. XIII.
215. «Rev. Méthaphys. et morale», 1906, t. XIV.
216. *Richard J.* Lettre á Monsieur le rédacteur de la Revue Générale des Sciences.— «Acta math.», 1906, Bd 30. Paris.
217. *Richard J.* Les principes de mathématiques et le probleme des ensembles.— «Rev. gén. sci. pure et appl.». 1905, v. 16, N 12.
218. *Rosser B.* Burali-Forti paradox.— «J. Symbol. Logic», v. 7, Menasha, 1942, N 1.
219. *Russell B.* Principles of mathematics. London — N. Y., 1937.
220. *Russell B.* Principles of mathematics. London, 1950.
221. *Russell B.* Les paradoxes de la logiques.— «Rev. méthaphys. et morale», 1906, v. XIV.
222. *Russell B.* On some difficulties in the theory of transfinite numbers and order types.— Proc. London Math. Soc., 1906, ser. 2, v. 4, pt 1.
223. *Russell B., Whitehead A. N.* Principia mathematica, v. 3. Cambridge, 1927.

224. *Russell B., Whitehead A. N.* Principia mathematica, v. 1. Cambridge, 1935.
225. *Russell B.* Mysticism and logic. N. Y., 1957.
226. *Russell B.* Our knowledge of the external World. N. Y., 1960.
227. *Russell B.* Einführung in die mathematische Philosophie. München, 1923.
228. *Russell B.* Mathematical logic as based on the theory types.— In: Logique und knowledge. London, 1950.
229. *Schröder E.* Vorlesungen über die Algebra der Logik, Bd 1. Leipzig, 1890.
230. *Schütte K.* Neuere Ergebnisse der Beweistheorie.— Труды Международного Конгресса математиков. М., 1968.
231. *Sierpinski W.* Cardinal and ordinal numbers. Warszawa, 1958.
232. *Skolem T.* Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre.— Wiss. Vortrage 5. Kongr. skandinavischen Mathematiker Helsingfors, 1922.
233. *Skolem T.* Über einige Grundlegenfragen der Mathematik.— Skr. Norske Videnskaps-Akad. Oslo, 1930.
234. *Specker E.* Antinomien des Mengenlehre.— «Dialektica», 1954, v. 8, N 3.
235. *Vredenduin P. G. S.* The logic of negationless mathematics.— «Compositio math.», 1953, v. 11, fasc. 3.
236. *Wang Hao.* A survey of mathematical logic. Peking, 1962.
237. *Wang Hao.* What is an Individual? — «Philos. Rev.», 1953, v. 62.
238. *Wang Hao, McNaugthon R.* Les systémes axiom. Paris, 1953.
239. *Wang Hao.* The irreductibility of impredicative principles.— «Math. Ann.», 1952, Bd 125, H. 1.
240. *Weyl H.* Gesammelte Abhandl., Bd. III. Berlin — N. Y., 1952,
241. *Weyl H.* Gesammelte Abhandl., Bd. IV. Berlin — N. Y., 1968.
242. *Weyl H.* Das Kontinuum. Leipzig, 1918.
243. *Weyl H.* Philosophy of mathematics and natural science. Princeton, 1949.
244. «Z. Philos. und philos. Kritik», 1892, Bd 100.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение 3

Глава I

ПОНЯТИЕ БЕСКОНЕЧНОСТИ В ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Вклад Г. Кантора в развитие понятия бесконечности . . 12
Отношение математиков к появлению теории множеств . 19
Два первых парадокса теории множеств 26
Третий парадокс 34
Еще три парадокса 40

Глава II

ПЕРВЫЕ ПОПЫТКИ РАЗРЕШИТЬ ПАРАДОКСЫ

Неокантианцы и Гуссерль 51
Логицизм 67
Формализм 76
Интуиционизм 85
Критика и развитие первых попыток разрешить парадоксы 93

Глава III

СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПРОБЛЕМЫ БЕСКОНЕЧНОСТИ

Бесконечность и вычислительная техника 112
Современный вариант средневековых философских течений 117
Бессилие финитизма перед актуальной бесконечностью . . 123
Законы формальной логики и диалектика 136
Континуум-гипотеза 147
Через парадоксы — к диалектике 155

ЛИТЕРАТУРА 168